目录

专题 01　双变量“存在性或任意性”问题(1)

【方法点拨】

解决双变量“存在性或任意性”问题关键就是将含有全称量词和存在量词的条件“等价转化”为两个函数值域之间的关系(或两个函数最值之间的关系)，目的在于培养学生的逻辑推理素养和良好的数学思维品质.

若 $f(x)$，$g(x)$的值域分别为 A，B，则有:

①$\forall x_1\in D$，　$\exists x_2\in E$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则 $A\subseteq B$；

②　$\exists x_1\in D$，　$\exists x_2\in E$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则 $A\cap B\neq\varnothing$.

【典型题示例】

例 1　(2020·江苏苏州大学·考前指导卷·13) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4},\frac{1}{2}<x\leqslant 1,\\ -\frac{1}{3}x+\frac{1}{6},0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$

$g(x)=e^x+ax-2(a\in\mathbf{R})$，若存在 x_1，$x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $a\geqslant 2-e$

【解析】当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)$单调递减，$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{6}$；

当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时，$f'(x)=x^2-\frac{1}{4}\geqslant 0$成立，

$f(x)$单调递增，$\frac{1}{6}<f(x)\leqslant\frac{1}{3}$，

所以 $f(x)$的值域为 $A=\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

设 $g(x)$的值域为 B，因为存在 x_1，$x_2\in[0,1]$使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，

所以 $B\cap A\neq\varnothing$. $g(x)=e^x+ax-2$，$g'(x)=e^x+a$.

①$a\geqslant -1$，任意 $x\in[0,1]$，$g'(x)\geqslant 0$成立，$g(x)$在$[0,1]$单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=-1$，$g(x)_{\max}=g(1)=e+a-2$，$B=[-1,e+a-2]$.

因为 $B\cap A\neq\varnothing$，所以 $e+a-2\geqslant0$，$a\geqslant2-e$；

②$a\leqslant-e$，任意 $x\in[0,1]$，$g'(x)\leqslant0$ 成立，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+a-2$，$g(x)_{\max}=g(0)=-1$，$B=[e+a-2,-1]$，

则 $B\cap A=\varnothing$，不合题意；

③$-e<a<-1$，令 $g'(x)=e^{x}+a=0$，$x=\ln(-a)$，

$g(x)$ 在 $(0,\ln(-a))$ 递减，$(\ln(-a),1)$ 递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln(-a))=-a-2+a\ln(-a)$，$g(x)_{\max}=\max\{g(0),g(1)\}$，.

又 $g(0)=-1<0$，$g(1)=e+a-2<0$，

则 $B\cap A=\varnothing$，不合题意.

综上所述，$a\geqslant2-e$.

点评：

存在性和恒成立混合问题注意理解题意，等量关系转化为值域的关系.

例 2 已知 $f(x)$是定义在$[-2，2]$上的奇函数，且当 $x\in(0，2]$时，$f(x)=2^{x}-1$，函数 $g(x)=x^{2}-2x+m$，且如果对于任意的 $x_1\in[-2，2]$，都存在 $x_2\in[-2，2]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$，则实数 m 的取值范围是______________.

【答案】 $[-5，-2]$

【分析】易得 $f(x)\in[-3,3]$，$g(x)\in[m-1,m+8]$，若对于 $\forall x_1\in[-2,2],\exists x_2\in[-2,2]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$，只需 $f(x)$ 的值域包含于 $g(x)$ 的值域即可，即 $m-1\leqslant-3$ 且 $m+8\geqslant3$，解得 $-5\leq m\leq-2$.

【解析】 $x\in(0，2]$时，$f(x)=2^{x}-1$ 为增函数，值域为$(0，3]$，

因为 $f(x)$是定义在$[-2，2]$上的奇函数，所以 $f(x)$在$[-2，2]$上的值域为$[-3，3]$，

函数 $g(x)=x^{2}-2x+m$ 在 $x\in[-2，2]$上的值域为$[m-1，m+8]$.

因为对任意的 $x_1\in[-2,\ 2]$，都存在 $x_2\in[-2,\ 2]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$，

所以 $f(x)$在$[-2, 2]$上的值域是 $g(x)=x^2-2x+m$ 在 $x\in[-2, 2]$上的值域的子集，

所以$\begin{cases}m+8\geq 3\\ m-1\leq -3\end{cases}$，解得$-5\leq m\leq -2$

即实数 m 的取值范围是$[-5,\ -2]$.

点评:

考查函数的单调性、奇偶性、最值、值域，以及恒成立，存在性问题，关键是理解题意，转化为值域之间的关系.

例 3 (2018·无锡高三第一学期期末)已知函数 $f(x)=$
$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}, & x\leqslant -\dfrac{1}{2},\\ \log\dfrac{1+x}{2}, & x>-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$g(x)=-x^2-2x-2$．若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $f(a)+g(b)=0$，则实数 b 的取值范围是________.

【答案】$(-2,0)$

【解析】当 $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=1+\dfrac{2x-1}{x^2}<1$，

此时 $f(x)=1+\dfrac{2x-1}{x^2}=1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$在$\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}\right]$上单调递减，易求得 $f(x)\in[-7,1)$;

当 $x>-\frac{1}{2}$时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1+x}{2}$，

此时 $f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上单调递减，易求得 $f(x)\in(-\infty,\ 2)$，

$\therefore f(x)$的值域为$(-\infty,\ 2)$.

故存在 $a\in R$，使得 $f(a)+g(b)=0\Rightarrow -g(b)=f(a)\in(-\infty,\ 2)\Rightarrow b^2+2b+2<2\Rightarrow b\in(-2,0)$.

例 4 已知函数 $f(x)=2^{x-1},g(x)=\begin{cases}a\cos x+2,x\geq 0\\ x^2+2a,x<0\end{cases}(a\in R)$，若对任意 $x_1\in[1,+\infty)$，总存在 $x_2\in R$，使 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup[1,2]$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{4},2\right]$

【答案】C

【解析】对任意 $x\in[1,+\infty)$，则 $f(x)=2^{x-1}\geq 2^0=1$，即函数 $f(x_1)$ 的值域为 $[1,+\infty)$，

若对任意 $x_1\in[1,+\infty)$，总存在 $x_2\in R$，使 $f(x_1)=g(x_2)$，

设函数 $g(x)$ 的值域为 A，则满足 $[1,+\infty)\subseteq A$，即可，

当 $x<0$ 时，函数 $g(x)=x^2+2a$ 为减函数，则此时 $g(x)>2a$，

当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=a\cos x+2\in[2-|a|,2+|a|]$，

①当 $2a<1$ 时，(红色曲线)，即 $a<\frac{1}{2}$时，满足条件 $[1,+\infty)\subseteq A$，

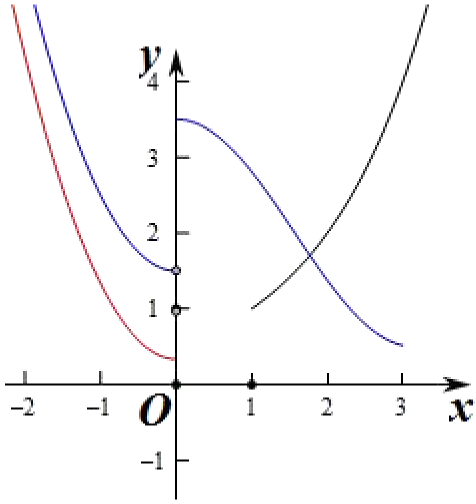
②当 $a\geq\frac{1}{2}$时，此时 $2a\geq 1$，要使 $[1,+\infty)\subseteq A$ 成立，

则此时 $g(x)=a\cos x+2\in[2-a,2+a]$，

此时满足(蓝色曲线)$\begin{cases} 2-a\le 1 \\ 2a\le 2+a \end{cases}$，即$\begin{cases} a\ge 1 \\ a\le 2 \end{cases}$，得$1\le a\le 2$，

综上$a<\frac{1}{2}$或$1\le a\le 2$，

故选：C.



【巩固训练】

1.已知函数 $f(x)=3x^2+2x-a^2-2a$，$g(x)=\frac{19}{6}x-\frac{1}{3}$，若对任意 $x_1\in[-1,1]$，总存在 $x_2\in[0,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则实数 a 的取值范围是____________.

2.已知函数 $f(x)=2x$，$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，函数 $g(x)=kx-2k+2(k>0)$，$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，若存在 $x_1\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$及 $x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，求实数 k 的取值范围.

3.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$，$g(x)=\ln(x+1)-a$，若存在 x_1，$x_2\in[0,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

4.已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}(x\geq 2)$，$g(x)=a^x(a>1，x\geq 2)$.

(1)若$\exists x_0\in[2，+\infty)$，使 $f(x_0)=m$ 成立，则实数 m 的取值范围为__________;

(2)若$\forall x_1\in[2，+\infty)$，$\exists x_2\in[2，+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围为__________.

5.已知函数$f(x)=\dfrac{-3x-7}{x+2}$，$g(x)=x^2-2x$，若存在实数$a\in(-\infty,-2)$，使得$f(a)+g(b)=0$ 成立，则实数b的取值范围是____________________。

6.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}, & x\leq -\dfrac{1}{2}\\ \log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1+x}{2}), & x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $g(x)=-x^2-2x-2$, 若存在 $a\in$R, 使得 $f(a)+g(b)=0$, 则实数 b 的取值范围是_______________.

【答案或提示】

1.【答案】$[-2,0]$

【解析】$f(x)=3x^2+2x-a(a+2)$，则 $f'(x)=6x+2$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{3}$.

当 $x\in\left[-1,\ -\frac{1}{3}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(-\frac{1}{3},\ 1\right]$时，$f'(x)>0$，

所以$[f(x)]_{\min}=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-a^2-2a-\frac{1}{3}$.

又由题意可知，$f(x)$的值域是$\left[-\frac{1}{3},\ 6\right]$的子集，

所以$\begin{cases} f(-1)\leqslant 6, \\ -a^2-2a-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}, \\ f(1)\leqslant 6, \end{cases}$

解得实数 a 的取值范围是$[-2,0]$.

2.【答案】$\left[\frac{1}{2},\ \frac{4}{3}\right]$

【解析】由题意，易得函数 $f(x)$的值域为$[0,1]$，$g(x)$的值域为$\left[2-2k,\ 2-\frac{3k}{2}\right]$，并且两个值域有公共部分．先求没有公共部分的情况，即 $2-2k>1$ 或 $2-\frac{3}{2}k<0$，解得 $k<\frac{1}{2}$或 $k>\frac{4}{3}$，所以，要使两个值域有公共部分，k 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\ \frac{4}{3}\right]$.

3.【答案】$[-4,\ln 3]$

【解析】$f(x)$值域 $A=[0,\ 4]$，$g(x)$值域 $B=[-a,\ \ln3-a]$，

由存在 x_1，$x_2\in[0,\ 2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 知：$A\cap B\neq\phi$

正难则反，先求出 $A\cap B=\phi$时，a 的取值范围

由 $A\cap B=\phi$得：$4<-a$ 或 $\ln3-a<0$，解之得：$a<-4$ 或 $a>\ln3$，

故 $A\cap B\neq\phi$时，$-4\leq a\leq\ln3$，所以 a 的取值范围是$[-4,\ln3]$.

4.【答案】(1)$[3,\ +\infty)$ (2)$(1,\ \sqrt{3}]$

【解析】(1)因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geq2+1=3$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立．所以若$\exists x_0\in[2,\ +\infty)$，使 $f(x_0)=m$ 成立，则实数 m 的取值范围为$[3,\ +\infty)$.

(2)因为当 $x\geq2$ 时，$f(x)\geq3$，$g(x)\geq a^2$，若$\forall x_1\in[2,\ +\infty)$，$\exists x_2\in[2,\ +\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则$\begin{cases}a^2\leq3,\\ a>1,\end{cases}$ 解得 $a\in(1,\ \sqrt{3}]$.

5.【答案】$(-1,3)$

6.【答案】$(-2,0)$

专题 02 双变量“存在性或任意性”问题(2)

【方法点拨】

不等问题

①$\forall x_1\in D$，$\forall x_2\in E$,均有 $f(x_1)>g(x_2)$恒成立,则 $f(x)_{min}>g(x)_{max}$;

② $\forall x_1\in D$，$\exists x_2\in E$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$成立,则 $f(x)_{min}>g(x)_{min}$;

③ $\exists x_1\in D$，$\exists x_2\in E$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$成立,则 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$;

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$，$g(x)=\ln(x+1)-a$，若存在 x_1，$x_2\in[0,2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

【答案】 $a>-4$

【分析】问题可转化为 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$，易得 $f(x)_{max}=4$，$g(x)_{min}=-a$，由 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$ 得:

$4>-a$，故 $a>-4$ 即为所求.

点评:

存在性和恒成立混合问题注意理解题意，不等关系转化为最值的关系.

例 2 已知函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，$g(x)=2^x+a$，若 $\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使得 $f(x_1)\le g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 依题意知 $f(x)_{max}\le g(x)_{max}$.

$\because f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是减函数，$\therefore f(x)_{max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}$.

又 $g(x)=2^x+a$ 在 $[2,3]$ 上是增函数，$\therefore g(x)_{max}=8+a$，

因此 $\frac{17}{2}\le 8+a$，则 $a\ge\frac{1}{2}$.

点评:

理解量词的含义，将原不等式转化为$[f(x)]_{max}\leqslant[g(x)]_{max}$；利用函数的单调性，求 $f(x)$与 $g(x)$的最大值，得关于 a 的不等式求得 a 的取值范围．

例 3 设 $a>0$，函数 $f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}$，$g(x)=x-\ln x+4$，若对任意的 $x_1\in[1,e]$，存在 $x_2\in[1,e]$，都有 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，则实数 a 的取值范围为___________.

【答案】$\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

【分析】问题可转化为$f(x)_{min}\geqslant g(x)_{min}$，函数 $g(x)$不含参，易求得 $g(x)_{min}=g(1)=5$，接下来的思路有二，一是直接分类讨论求$f(x)_{min}$，二是将$f(x)_{min}\geqslant g(x)_{mi}$转化为$f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant5$恒成立，通过分离参数再解决

【解析】 问题可转化为$f(x)_{min}\geqslant g(x)_{min}$.

当$x\in[1,e]$时，$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}\geqslant0$，故 $g(x)$在$[1,e]$上单调递增，则 $g(x)_{min}=g(1)=5$.

思路一：又$f'(x)=1-\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{x^2-a^2}{x^2}$，令$f'(x)=0$，易知 $x=a$ 是函数$f(x)$的极小值.

当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)_{min}=1+a^2$，则 $1+a^2\geqslant5$，不成立；

当 $1<a\leqslant e$ 时，$f(x)_{min}=f(a)=2a$，则 $2a\geqslant5$，得$\dfrac{5}{2}\leqslant a\leqslant e$；

当 $a>e$ 时，$f(x)_{min}=f(e)=e+\dfrac{a^2}{e}\geqslant5$ 显然成立，得 $a^2>5e-e^2$，所以 $a>e$.

综上所述，实数 a 的取值范围为$\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

思路二：故有$f(x)_{min}\geqslant5$，即$f(x)=x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant5$恒成立，分离参数得 $a^2\geqslant x(5-x)$，

易得$[x(5-x)]_{max}=\dfrac{25}{4}$，又 $a>0$，故 $a\geqslant\dfrac{5}{2}$

所以实数 a 的取值范围为$\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

例 4 已知函数$f(x)=x^2-2ax+1$，$g(x)=\dfrac{a}{x}$，其中 $a>0$，$x\neq0$.

(1) 对任意的 $x\in[1,2]$，都有$f(x)>g(x)$恒成立，求实数 a 的取值范围；

【解析】由题意知，$f(x)-g(x)>0$ 对 $x\in[1,2]$恒成立，即 $x^2-2ax+1-\dfrac{a}{x}>0$ 对 $x\in[1,2]$恒成立，即 $a<\dfrac{x^3+x}{2x^2+1}$对 $x\in[1,2]$

恒成立，令$\varphi(x)=\dfrac{x^3+x}{2x^2+1}$，只需 $a<\varphi(x)_{\min}(x\in[1,2])$.

由于$\varphi'(x)=\dfrac{2x^4+x^2+1}{(2x^2+1)^2}>0$，故$\varphi(x)$在 $x\in[1,2]$上是增函数，

$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=\dfrac{2}{3}$，所以 a 的取值范围是$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$.

(2) 对任意的 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】 由题意知 $x^2-2ax+1>\left(\dfrac{a}{x}\right)_{\min}=\dfrac{a}{2}$，即 $a<\dfrac{2(x^2+1)}{4x+1}$对 $x\in[1,2]$恒成立.

令$\varphi(x)=\dfrac{2(x^2+1)}{4x+1}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{8(x^2-1)+4x}{(4x+1)^2}>0$ 对 $x\in[1,2]$恒成立，

则$\varphi(x)$在$[1,2]$上是增函数，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=\dfrac{4}{5}$,

所以 a 的取值范围是$\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$.

点评：

防止误将$\forall x\in D$，均有 $f(x)>g(x)$恒成立，转化为 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，一般应作差构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，转化为 $F(x)_{\min}>0$ 恒成立.

【巩固训练】

1．已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$，$g(x)=\log_2x+m$，对任意的 x_1，$x_2\in[1,4]$有 $f(x_1)>g(x_2)$恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

2. 已知函数 $f(x)=\ln(x^2+1)$, $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-m$, 若对$\forall x_1\in[0,3]$, $\exists x_2\in[1,2]$, 使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$, 则实数 m 的取值范围是________.

3. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，$g(x)=2^x+a$，若$\forall x_1\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是________.

4. (2018·沙市区校级期中)函数 $f(x)=x^3-12x+3$，$g(x)=3^x-m$，若对$\forall x_1\in[-1,5]$，$\exists x_2\in[0,2]$，$f(x_1)\geq g(x_2)$，则实数 m 的最小值是________.

5.(2019·南通、徐州等七市三检·13)已知函数 $f(x)=x^2-2x+3a$，$g(x)=\dfrac{2}{x-1}$.若对任意的 $x_1\in[0，3]$，总存在 $x_2\in[2，3]$，使得$|f(x_1)|\leq g(x_2)$成立，则实数 a 的值为________.

【答案或提示】

1.【答案】$(-\infty, 0)$

【解析】$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，当 $x\in[1,4]$时，$f(x)_{\min}=f(1)=2$，$g(x)_{\max}=g(4)=2+m$，则 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，即 $2>2+m$，解得 $m<0$，故实数 m 的取值范围是$(-\infty, 0)$.

2.【答案】$\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【解析】当 $x\in[0,3]$时，$f(x)_{\min}=f(0)=0$，当 $x\in[1,2]$时，$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{1}{4}-m$，由 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\min}$，得 $0\geq\frac{1}{4}-m$，所以 $m\geq\frac{1}{4}$.

3.【答案】 $(-\infty, 1]$

【解析】由题意知，$f(x)_{\min}\left(x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)\geq g(x)_{\min}(x\in[2,3])$，因为 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，所以 $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$，所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=5$，又因为 $g(x)$在$[2,3]$上的最小值为 $g(2)=4+a$，所以 $5\geq4+a$，即 $a\leq1$.

4.【答案】14

【解析】由 $f'(x)=3x^2-12$，可得 $f(x)$在区间$[-1,2]$上单调递减，在区间$[2,5]$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=-13$，

$\because g(x)=3^x-m$ 是增函数，$\therefore g(x)_{\min}=1-m$，

要满足题意，只需 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\min}$ 即可，解得 $m\geq14$，

故实数 m 的最小值是 14.

5.【答案】 $-\frac{1}{3}$

专题 03　二元不等式恒成立问题

【方法点拨】

1. 对于“双参求一参数范围问题”宜采取变更主元法，如例 1、例 2，此类题目的特征是：含有双参数而问题是求其中一个参数的取值范围，只需将另一参数视为“主元”，求出最值即可.

2. 对于“ $f(x)\ge ax+b$ 或 $f(x)\le ax+b$ 求有关 a、b 的代数式取值范围”型，利用几何意义，转化为比较零点来处理.

【典型题示例】

例 1　(2020 • 海安中学 3 月线上测试 • 14)若关于 x 的不等式 $x^3-3x^2+ax+b<0$ 对任意的实数 $x\in[1，3]$及任意的实数 $b\in[2，4]$恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty，-2)$

【分析】本题的特征是，较一般的不等式恒成立问题，增加了一个变量，一般是关于该变量的“一次式”，其解法是：变更主元，先看作“一次变量”的恒成立问题即可.

【解析】先视为以 b 为主元的函数，设 $f(b)=b+(x^3-3x^2+ax)$

则 $f(b)$为关于 b 的一次函数，在 $b\in[2，4]$上增，为使 $f(b)<0$ 恒成立

只需 $f(4)<0$，即 $x^3-3x^2+ax+4<0$

再考虑 $x^3-3x^2+ax+4<0$ 在 $x\in[1，3]$恒成立

分离参数可得：$a<3x-x^2-\frac{4}{x}$，

设 $g(x)=3x-x^2-\frac{4}{x}$，$x\in[1，3]$，故 $a<g(x)$的最小值

由 $g'(x)=3-2x+\frac{4}{x^2}$，可得 $1<x<2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增；$2<x<3$ 时，

$g'(x)<0$，$g(x)$递减，

又 $g(1)=-2$，$g(3)=-\frac{4}{3}$，可得 $g(x)$在$[1，3]$的最小值为 -2，

$\therefore a<-2$，故实数 a 的范围是$(-\infty，-2)$.

例 2　已知函数 $f(x)=8\ln x+x^2-10x+c$，若对任意 $k\in[-1,1]$，$x\in(0,8]$，不等式 $(k+1)x\ge f(x)$ 恒成立，求实数 c 的取值范围 .

【答案】$(-\infty,16-8\ln 8]$

【解析】由 $(k+1)x\geqslant f(x)$ 在 $x\in(0,8]$ 恒成立，

整理得 $k\geqslant\frac{8\ln x}{x}+x-11+\frac{c}{x}$ 对任意 $k\in[-1,1]$ 恒成立，

所以应有 $-1\geqslant\frac{8\ln x}{x}+x-11+\frac{c}{x}$ 恒成立，

即 $c\leqslant-8\ln x-x^2+10x$ 对 $x\in(0,8]$ 恒成立 .

设 $g(x)=-8\ln x-x^2+10x, x\in(0,8]$，

则 $g'(x)=-\dfrac{8}{x}-2x+10=-\dfrac{2(x-1)(x-4)}{4}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=4$，列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,8)$	8
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	↘	极小值 $g(1)$	↗	极大值 $g(4)$	↘	$16-8\ln 8$

$g(1)-g(8)=9-16+8\ln 8=8\ln 8-7>8\ln 8-8=8(\ln 8-1)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,8]$ 的最小值为 $g(8)=16-8\ln 8$，又 $c<4$，

$16-8\ln 8-4=12-8\ln 8<12-8\ln e^2=12-16<0$，

所以实数 c 的取值范围是 $(-\infty,16-8\ln 8]$．

例 3　(2018·江苏南京最后一卷·14)已知 a，$b\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $\ln x\leqslant a(x-2)+b$ 对一切正实数 x 恒成立，则当 $a+b$ 取最小值时，b 的值为__________.

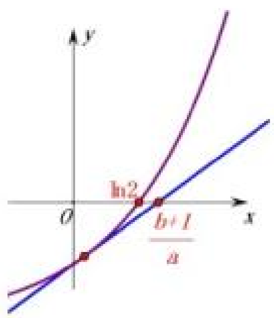
【答案】$\ln 3-\dfrac{1}{3}$.

【分析】在平面直角坐标系 xOy 中，分别作出 $y=\ln x$ 及 $y=a(x-2)+b$ 的图象，不等式 $\ln x\leqslant a(x-2)+b$ 对一切正实数 x 恒成立，即直线 $y=a(x-2)+b$ 恒在曲线 $y=\ln x$ 的上方．$a+b$ 最小，即直线 $y=a(x-2)+b$ 与 $x=3$ 交点的纵坐标最小．根据图象可知：$a+b$ 的最小值为 $\ln 3$，此时直线 $y=a(x-2)+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点$(3，\ln 3)$，因此有：$a=\dfrac{1}{3}$，从而 $b=\ln 3-\dfrac{1}{3}$.

例 4　已知 $a,b\in R$，若 $e^x-1\geq ax-b$ 恒成立，则 $\dfrac{b-a+1}{a}$ 的取值范围是________.

【答案】$[\ln 2-1,+\infty)$

【分析】所求 $\dfrac{b-a+1}{a}=\dfrac{b+1}{a}-1$，为了出现 $\dfrac{b+1}{a}$，将 $e^x-1\geq ax-b$ 变形为 $e^x-2\geq ax-(b+1)$，此时 $\dfrac{b+1}{a}$ 的几何意义是直线 $y=ax-(b+1)$ 在 x 轴上的截距即函数 $y=ax-(b+1)$ 的零点，根据图象可知，当 $e^x-2\geq ax-(b+1)$ 时，曲线 $y=e^x-2$ 在任意一点的切线的零点都不小于曲线的零点，即 $\dfrac{b+1}{a}\geq\ln 2$，所以 $\dfrac{b-a+1}{a}=\dfrac{b+1}{a}-1\geq\ln 2-1$，$\dfrac{b-a+1}{a}$ 的取值范围是 $[\ln 2-1,+\infty)$.



点评：

对于 $f(x)\ge ax+b$ 或 $f(x)\le ax+b$ 型恒成立，求有关 a、b 的代数式取值范围问题的解题步骤是：

① 判断函数的凸凹性(当 $f''(x)>0$ 时，函数为凹函数；当 $f''(x)>0$ 时，函数为凸函数)，从而得出因凸凹的不同，切线在曲线的上下的不同；

② 凑配条件中的参数系数，求曲线和切线的零点，比较零点的大小即可.

例 5 若 $ae^x\ge \ln x+1$ 恒成立，则 a 的取值范围是_______.

【答案】$\left[e^{-1},+\infty\right)$

【分析】取对数，化双曲为"一直一曲"，解法同例 3.

【解析】对 $ae^x\ge \ln x+1$ 两边取自然对数得 $\ln a+x\ge \ln(\ln x+1)$

故 $-\ln a\le 1$， $a\ge e^{-1}$

所以 a 的取值范围是 $\left[e^{-1},+\infty\right)$.

【巩固训练】

1. 若不等式 $bx+c+9\ln x\le x^2$，对任意 $x\in(0,+\infty)$，$b\in(0,3)$ 恒成立，则实数 c 的取值范围为_________.

2. 设函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b(x\in R)$，其中 $a,b\in R$．若对于任意的 $a\in[-2,2]$，不等式 $f(x)\le 1$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，则 b 的取值范围为_________.

3. (2020 • 江苏天一中学 • 12 月考)设 a 、b 均为实数，已知函数 $f(x)=axe^x$ $(a\in R)$，若不等式 $f(x)$ $2x^2+bx$ 对任意的 a 1 及任意的 $x>0$ 恒成立，求 b 的取值范围；

4. 已知 $a,b\in R$，若 $\ln x-1\le ax-b$ 恒成立，则 $\dfrac{b-a+1}{a}$ 的取值范围是_______.

5. 已知直线 $y=ax+b$ 与曲线 $f(x)=\ln x-1$ 相切，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值是(　　)

A. $-\dfrac{1}{e^2}$　　B. $-e^2$　　C. $-e$　　D. $-\dfrac{1}{e}$

6. 若不等式 $e^x-4x+2\ge ax+b$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立，则 $\dfrac{b-4}{a+4}$ 的最大值是(　　)

A. $2-2\ln 2$　　B. $-1-\ln 2$　　C. $-\ln 2$　　D. $-2\ln 2$

【答案或提示】

1.【答案】$\left(-\infty,-9\ln 3\right)$

2.【答案】$\left(-\infty,-4\right]$.

3.【分析】变更主元、分离参数，可得 $e^x-2x\quad b$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，构造函数 $\varphi(x)=e^x-2x$，利用导数求出函数的最值即可求出 b 的范围，

【解析】由 $f(x)\quad 2x^2+bx$，得 $axe^x\quad 2x^2+bx$，由于 $x>0$，

所以 $ae^x\quad 2x+b$ 对任意的 $a\quad 1$ 及任意的 $x>0$ 恒成立.

由于 $e^x>0$，所以 $ae^x\quad e^x$，所以 $e^x-2x\quad b$ 对任意的 $x>0$ 恒成立.

设 $\varphi(x)=e^x-2x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=e^x-2$，

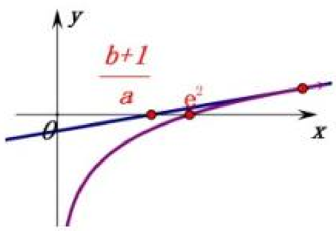
所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0$，$ln\quad 2)$ 上单调递减，在 $(ln\quad 2$，$+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi(ln\ 2)=2-2ln\ 2$，

所以 $b\quad 2-2ln\ 2$.

4.【答案】$\left(-\infty,e^2-1\right]$

【提示】如图中，同例 3，易得 $\dfrac{b+1}{a}\le e^2$.



5.【答案】C

6.【答案】C

【提示】将 $e^x-4x+2\ge ax+b$ 变形为 $e^x-2\ge(a+4)x+(b-4)$ 即可.

专题 04　函数的单调性

【方法点拨】

1. 单调函数是一对一的，运用之结合待定系数法可求函数的解析式(如例 1).

2. 看到具有“(经过变形后)对称结构”的数式，应想到构造函数，运用函数的单调性解决问题.

【典型题示例】

例 1　已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调函数，对于定义域内任意 x， $f\left[f(x)-\log_2 x\right]=3$，则函数 $g(x)=f(x)+x-7$ 的零点所在的区间为(　)

A．$(1,2)$　　　B．$(2,3)$　　　C．$(3,4)$　　　D．$(4,5)$

【答案】C

【分析】本题的关键在于求出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，紧紧抓住“ $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调函数”这一重要条件，设 $f(x)-\log_2 x$ 为定值，即 $t=f(x)-\log_2 x$，然后使用赋值法求出参数的 t 值即可.

【解析】因为 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调函数，且对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f\left[f(x)-\log_2 x\right]=3$，

所以 $f(x)-\log_2 x$ 为定值，设 $t=f(x)-\log_2 x$，则 $f\left(x\right)=\log_2 x+t$，

又由 $f\left(t\right)=3$，$\therefore f\left(t\right)=\log_2 t+t=3$，所以 $t=2$，

所以 $f\left(x\right)=\log_2 x+2$，所以 $g\left(x\right)=\log_2 x+x-5$，

因为 $g\left(1\right)<0$，$g\left(2\right)<0$，$g\left(3\right)<0$，$g\left(4\right)>0$，$g\left(5\right)>0$，

所以零点所在的区间为(3，4).

例 2　(多选题)若实数 a， b 满足 $2^a+3a=3^b+2b$，则下列关系式中可能成立的是(　　)

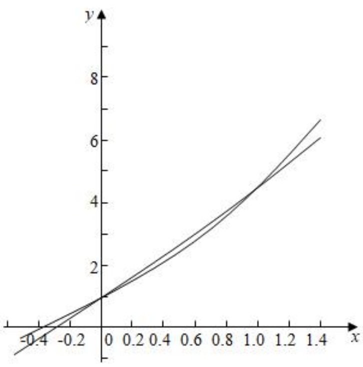
A．$0<a<b<1$　　B．$b<a<0$　　C．$1<a<b$　　D．$a=b$

【分析】构造 $f(x)=2^x+3x$， $g(x)=3^x+2x$，易知 $f(x)$， $g(x)$ 是递增函数，结合函数的图象，得出结论.

【解析】由 $2^a+3a=3^b+2b$，

设 $f(x)=2^x+3x$， $g(x)=3^x+2x$，易知 $f(x)$， $g(x)$ 是递增函数，当 $x=0$，1 时， $f(x)=g(x)$，

画出 $f(x)$， $g(x)$ 的图象如下：



根据图象可知： $0<a<b<1$ ， f (a) $=f$ (b)可能成立；故 A 正确；

当 $b<a<0$ 时，因为 $f(x)\quad g(x)$ ，所以 f (a) $=f$ (b)可能成立， B 正确；

当 $a=b$ 时，显然成立，

当 $1<a<b$ 时，因为 $f(a)<g(b)$，所以不可能成立，

故选： ABD .

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}，x\leq 0，\\1，x>0，\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-1]$　　　　B．$(0，+\infty)$

C．$(-1,0)$　　　　D．$(-\infty，0)$

【答案】　D

【解析】　法一：分类讨论法

①当 $\begin{cases}x+1\leq 0，\\2x\leq 0，\end{cases}$ 即 $x\leq -1$ 时，

$f(x+1)<f(2x)$，即为 $2^{-(x+1)}<2^{-2x}$，

即 $-(x+1)<-2x$，解得 $x<1$.

因此不等式的解集为 $(-\infty，-1]$.

②当 $\begin{cases}x+1\leq 0，\\2x>0\end{cases}$ 时，不等式组无解.

③当 $\begin{cases}x+1>0，\\2x\leq 0，\end{cases}$ 即 $-1<x\leq 0$ 时，

$f(x+1)<f(2x)$，即为 $1<2^{-2x}$，解得 $x<0$.

因此不等式的解集为 $(-1,0)$.

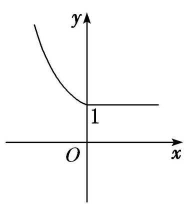
④当 $\begin{cases}x+1>0，\\2x>0，\end{cases}$ 即 $x>0$ 时，$f(x+1)=1$，$f(2x)=1$，不合题意.

综上，不等式 $f(x+1)<f(2x)$ 的解集为 $(-\infty，0)$.

法二：数形结合法

$\because f(x)=\begin{cases}2^{-x}，x\leq 0，\\1，x>0，\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



结合图象知，要使 $f(x+1)<f(2x)$，

则需$\begin{cases}x+1<0, \\ 2x<0, \\ 2x<x+1\end{cases}$　　或$\begin{cases}x+1\ge 0, \\ 2x<0,\end{cases}$

∴$x<0$，故选 D.

例 4　(2020·江苏南通五月模拟·14)已知$\theta\in[0,2\pi)$，若关于k的不等式$\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$在$(-\infty,-2]$上恒成立，则$\theta$的取值范围为_________.

【答案】$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

【分析】本题的实质是含参数θ(这里当然是$\sin\theta$、$\cos\theta$)的不等式恒成立问题，应抓住已知条件$\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$的对称结构，构造函数，利用函数的单调性布列不等式.

【解析】看到$\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$想“对称结构”，将它变形为：

$k\sin^3\theta-\sqrt{\sin\theta}\ge k\cos^3\theta-\sqrt{\cos\theta}$，

设$f(x)=kx^3-\sqrt{x}$，$f'(x)=3kx^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

易知当$k\in(-\infty,-2]$时，$f'(x)=3kx^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$，故$f(x)$在$[0,+\infty)$单减，

所以$\begin{cases}\sin\theta\le\cos\theta \\ \sin\theta\ge 0 \\ \cos\theta\ge 0\end{cases}$，解之得：$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$

所以θ的取值范围$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

例 5　(2020·江苏淮阴中学、姜堰中学 12 月考·14))已知实数x_1，x_2满足$x_1e^{x_1}=e^3$，$x_2(\ln x_2-2)=e^5$，则$x_1x_2=$______.

【分析】由已知条件考虑将两个等式转化为统一结构形式，令$\ln x_2-2=t, x_2=e^{t+2}$，得到$te^t=e^3$，研究函数$f(x)=xe^x$的单调性，求出x_1,t关系，即可求解.

解法一：实数x_1，x_2满足$x_1e^{x_1}=e^3$，$x_2(\ln x_2-2)=e^5$，

$x_1>0, x_2>e^2$，$\ln x_2-2=t>0, x_2=e^{t+2}$，则$te^t=e^3$，

$f(x)=xe^x(x>0), f'(x)=(x+1)e^x>0(x>0)$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，而$f(x_1)=f(t)=e^3$，

$\therefore x_1=t=\ln x_2-2,\therefore x_1x_2=x_2(\ln x_2-2)=e^5$.

解析二：对 $x_1e^{x_1}=e^3$ 两边取自然对数得：$\ln x_1+x_1=3$，

对 $x_2\left(\ln x_2-2\right)=e^5$ 两边取自然对数得：$\ln x_2+\ln\left(\ln x_2-2\right)=5$　　(※)

为使两式结构相同，将(※)进一步变形为：$\left(\ln x_2-2\right)+\ln\left(\ln x_2-2\right)=3$

设 $f(x)=\ln x+x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)=3$ 的解只有一个.

$\therefore x_1=\ln x_2-2$，$\therefore x_1x_2=\left(\ln x_2-2\right)x_2=e^5$.

【巩固训练】

1．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geq 0\\ 1, \quad x<0\end{cases}$,则满足不等式 $f(1-x^2)>f(2x)$ 的 x 的范围是__________.

2.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geq 0\\ 2x-x^2, & x<0\end{cases}$，若 $f\left(2-a^2\right)>f\left(a\right)$，则实数 a 的取值范围是__________.

3.(2020·扬州三检·12)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\leq 2\\ \dfrac{1}{2}x-1, & x>2\end{cases}$，则关于 x 的不等式 $f(1-x)<f(2-x)$ 的解集为______.

4.(2020·江苏南通市如皋中学创新班四月模拟·2)已知实数 a，$b\in(0,\ 2)$，且满足 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，则 $a+b$ 的值为_______ .

5.不等式 $x^6-(x+2)^3+x^2\leq x^4-(x+2)^2+x+2$ 的解集是________.

6. 若 x_1 满足方程 $2x+2^x=5$，x_2 满足方程 $2x+\log_2{}^{(x-1)}=5$，则 $x_1+x_2=$___________.

7. 已知单调函数 $f\left(x\right)$ 是定义域是 $\left(0,+\infty\right)$，对于定义域内任意 x，$f\left[f(x)-\log_2 x\right]=3$，则函数 $g(x)=f(x)+x-9$ 的零点所在的区间为(　)

A．$(1,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(3,4)$　　D．$(4,5)$

【答案或提示】

1.【答案】$\left(-1,\sqrt{2}-1\right)$

【解析】考查分段函数的单调性，$\begin{cases}1-x^2>2x\\1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,\sqrt{2}-1)$.

2.【解析】Q $y=x^2+2x$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，$y=2x-x^2$ 在$(-\infty,0)$上单调递增，且$0^2+2\times 0=2\times 0-0^2$，$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增，

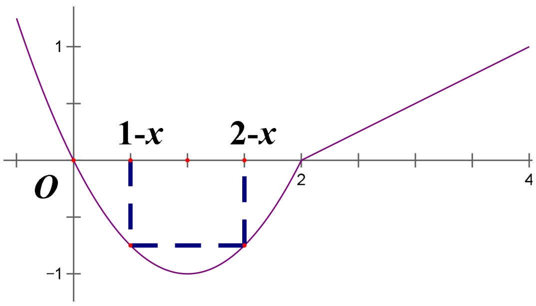
因此由 $f\left(2-a^2\right)>f\left(a\right)$ 得 $2-a^2>a,\therefore -2<a<1$，故答案为：$\left(-2,1\right)$

3.【答案】$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$

【分析】作出函数 $f\left(x\right)$ 图象，考察动区间$\left[1-x,2-x\right]$间图象的单调性，易得，当$1-x=\dfrac{1}{2}$

即 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(1-x)=f(2-x)$，此即为“临界值”，而动区间右移时满足题意，故$1-x>\dfrac{1}{2},x<\dfrac{1}{2}$

所以不等式 $f(1-x)<f(2-x)$ 的解集为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$.



4.【答案】2

【分析】将 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$ 化为：$a^2+2^a=(2-b)^2+2^{2-b}$，设 $f\left(x\right)=x^2+2^x$，则 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,2\right)$上递增，

由 $f\left(a\right)=f\left(2-b\right)$，得 $a+b$ 的值.

【解析】由 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，化简为：$a^2+2^a=2^{2-b}+(b-2)^2$，即 $a^2+2^a=(2-b)^2+2^{2-b}$，

设 $f\left(x\right)=x^2+2^x$，则 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,2\right)$上递增，因为 a，b∈(0，2)，所以 2-b∈(0，2)，

且 $f\left(a\right)=f\left(2-b\right)$，所以 $a=2-b$，即 $a+b=2$.

5.【答案】[－1,2].

6.【答案】$\frac{7}{2}$

7.【答案】D

专题05　函数的奇偶性与单调性

【方法点拨】

1. 若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(|x|)$，其作用是将“变量化正”，从而避免分类讨论.

2. 以具体的函数为依托，而将奇偶性、单调性内隐于函数解析式去求解参数的取值范围，是函数的奇偶性、单调性的综合题的一种重要命题方式，考查学生运用知识解决问题的能力，综合性强，体现能力立意，具有一定难度.

【典型题示例】

例1　(2021·江苏启东期初)设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$　　B. $\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right)\cup(1,\ +\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\ +\infty\right)$

【答案】A

【分析】发现函数 $f(x)$ 为偶函数，直接利用 $f(x)=f(|x|)$，将“变量化正”，转化为研究函数函数 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调性，逆用单调性脱“f”.

【解析】易知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$，易知此时 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)>f(2x-1)\Rightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)$，所以 $|x|>|2x-1|$，解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$.故选 A.

例2　(2017·江苏·11)已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\dfrac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$[-1,\dfrac{1}{2}]$

【分析】直接发现函数的单调性、奇偶性，将 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$ 移项，运用奇偶性再将负号移入函数内，逆用单调性脱“f”.

【解析】因为 $f(-x)=-x^3+2x+\dfrac{1}{e^x}-e^x=-f(x)$，　所以 $f(x)$ 是奇函数

又因为 $f'(x)=3x^2-2+e^x+e^{-x}\geq 3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}\geq 0$，所以数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增

由 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$、$f(x)$ 是奇函数得 $f(2a^2)\leqslant -f(a-1)=f(1-a)$，

由 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，得 $2a^2\leq 1-a$，即 $2a^2+a-1\leq 0$，解得 $-1\leq a\leq \dfrac{1}{2}$，

故实数 a 的取值范围为 $[-1,\dfrac{1}{2}]$.

例 3　已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+1$（e 为自然对数的底数），若 $f(2x-1)+f(4-x^{2})>2$，则实数 x 的取值范围为_________.

【答案】$\left(-1,3\right)$

【分析】本题是例 2 的进一步的延拓，其要点是需对已知函数适当变形，构造出一个具有奇偶性、单调性的函数, 其思维能力要求的更高，难度更大.

【解析】令 $F(x)=f(x)-1=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，易知 $F(x)$ 是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

由 $f(2x-1)+f(4-x^{2})>2$ 得 $f(4-x^{2})-1>1-f(2x-1)=-\left[f(2x-1)-1\right]$

即 $F(4-x^{2})>-F(2x-1)$

由 $F(x)$ 是奇函数得 $-F(2x-1)=F(1-2x)$，故 $F(4-x^{2})>F(1-2x)$

由 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，得 $4-x^{2}>1-2x$，即 $x^{2}-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$，

故实数 x 的取值范围为 $\left(-1,3\right)$.

例 4　已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\ge 1\\2^{x-1},x<1\end{cases}$，若 $f(2x-2)\ge f\left(x^{2}-x+2\right)$，则实数 x 的取值范围是(　　)

A．$[-2,-1]$　　　　B．$[1,+\infty)$

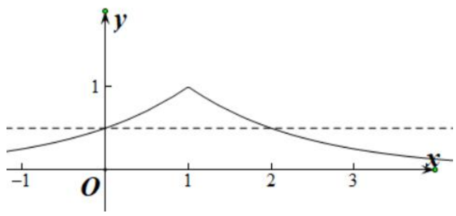
C．R　　　　D．$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\quad 1\\2^{x-1},x<1\end{cases}=2^{-|x-1|}$，故 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，且在 $[1，+\infty)$ 上单减，函数 $f(x)$ 的图象如下：

$\because f\quad(2x-2)\quad f(x^{2}-x+2)$，且 $x^{2}-x+2=(x-\frac{1}{2})^{2}+\frac{7}{4}>1$ 恒成立，

$\therefore|2x-2-1|\quad x^{2}-x+2-1$，即 $|2x-3|\quad x^{2}-x+1$，



当 $x\quad\frac{3}{2}$ 时，不等式化为：$2x-3\quad x^{2}-x+1$，即 $x^{2}-3x+4\quad 0$，解得 $x\in\mathbf{R}$，即 $x\quad\frac{3}{2}$；当 $x<\frac{3}{2}$ 时，不等式化为：$3-2x\quad x^{2}-x+1$，即 $x^{2}+x-2\quad 0$，解得 $x\quad -2$ 或 $x\quad 1$，即 $x\quad -2$ 或 $1\quad x<\frac{3}{2}$；

综上，$f(2x-2)\quad f(x^{2}-x+2)$ 时，实数 x 的取值范围是 $(-\infty，\ -2]\bigcup[1，\ +\infty)$.

故选：D．

例 5 (2019•江苏南师附中期中•14)已知函数 $f(x)=3^x-3^{-x}$，$f(1-2\log_3 t)+f(3\log_3 t-1)\ge \log_{\frac{1}{3}} t$，则 t 的取值范围是_______.

【答案】$[1,+\infty)$

【分析】将已知 $f(1-2\log_3 t)+f(3\log_3 t-1)\ge \log_{\frac{1}{3}} t$ 按照"左右形式相当，一边一个变量"的原则，移项变形为 $f(3\log_3 t-1)\ge \log_{\frac{1}{3}} t-f(1-2\log_3 t)$，易知 $f(x)=3^x-3^{-x}$ 是奇函数，故进一步变为 $f(3\log_3 t-1)+(3\log_3 t-1)\ge f(2\log_3 t-1)+(2\log_3 t-1)$ (#)，故下一步需构造函数 $F(x)=f(x)+x$，转化为研究 $F(x)=f(x)+x$ 的单调性，而 $F(x)=f(x)+x$ 单增，故(#)可化为 $\log_3 t\ge 0$，即 $3\log_3 t-1\ge 2\log_3 t-1$，解之得 $t\ge 1$.

【巩固训练】

1．若函数 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数，则实数 $a=$ _______

2.设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+\left|x\right|\right)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得 $f\left(x\right)>f\left(1\right)$ 成立的 x 的取值范围是(　　).

A．$(1,+\infty)$　　B．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

C．$(-1,1)$　　D．$\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right)$

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-2^x$，则满足 $f(x^2-5x)+f(6)>0$ 的实数 x 的取值范围是________.

4. 已知函数 $f(x)=x\cdot|x|+3x+1$，若 $f(a)+f\left(a^2-2\right)<2$，则实数 a 的取值范围__________.

5.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\ge 0\\ 2x-x^2, & x<0\end{cases}$，若 $f\left(2-a^2\right)>f\left(a\right)$，则实数 a 的取值范围是__________.

6.已知函数 $g\left(x\right)=e^x-e^{-x}$，$f\left(x\right)=xg\left(x\right)$，若 $a=f\left(\ln\dfrac{1}{3}\right)$，$b=f\left(0.2^{\frac{1}{4}}\right)$，$c=f\left(5^{1.2}\right)$，则 a、b、c 的大小关系为(　　)

A．$b<a<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<c<a$　　D．$a<b<c$

7.（2021•江苏启东期初•11）【多选题】关于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{2}{e^x-1}\right)$ 下列结论正确的是(　　)

A．图像关于 y 轴对称　　B．图像关于原点对称

C．在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增　　D．$f\left(x\right)$ 恒大于 0

8.已知函数 $f\left(x\right)=2020^{x}+\log_{2020}\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)-2020^{-x}+1$，则关于 x 的不等式 $f\left(2x+1\right)+f\left(x+1\right)-2>0$ 的解集为(　　).

A. $\left(-\dfrac{1}{2020},+\infty\right)$　　B. $\left(-2020,+\infty\right)$

C. $\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$

【答案或提示】

1．【答案】1

2.【答案】B

3.【答案】(2,3)

4.【答案】$(-2,1)$

5.【答案】$(-2,1)$

【解析】Q $y=x^2+2x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$y=2x-x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $0^2+2\times0=2\times0-0^2$，$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增，

因此由 $f\left(2-a^2\right)>f\left(a\right)$ 得 $2-a^2>a, \therefore -2<a<1$，故答案为：$(-2,1)$

6.【答案】A

【解析】$\because f\left(x\right)=xg\left(x\right)=x\left(e^x-e^{-x}\right)$，该函数的定义域为 R，

$f\left(-x\right)=-x\left(e^{-x}-e^x\right)=x\left(e^x-e^{-x}\right)$，所以，函数 $y=f\left(x\right)$ 为偶函数，

当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)=e^x-e^{-x}>0$，

任取 $x_1>x_2>0$，$-x_1<-x_2$，则 $e^{x_1}>e^{x_2}$，$e^{-x_1}<e^{-x_2}$，

所以，$e^{x_1}-e^{-x_1}>e^{x_2}-e^{-x_2}$，

$\therefore g\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)>0$，$\therefore x_1g\left(x_1\right)>x_2g\left(x_2\right)$，即 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，

所以，函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$a=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)=f\left(\left|\ln\frac{1}{3}\right|\right)=f\left(\ln 3\right)$，

$\because 0<0.2^{\frac{1}{4}}<0.2^0=1<\ln 3<5<5^{1.2}$，则 $f\left(0.2^{\frac{1}{4}}\right)<f\left(\ln 3\right)<f\left(5^{1.2}\right)$，

即 $b<a<c$.故选：A.

7.【答案】ACD

8.【答案】C

【解析】构造函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-1=2020^x+\log_{2020}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-2020^{-x}$，

由于 $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$，所以 $\sqrt{x^2+1}+x>0$，所以 $F\left(x\right)$ 的定义域为 R.

$F\left(-x\right)=2020^{-x}+\log_{2020}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-2020^x$

$$=2020^{-x}+\log_{2020}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]-2020^x$$

$$=2020^{-x}+\log_{2020}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]-2020^x$$

$$=2020^{-x}-\log_{2020}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-2020^x=-F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数， $F(0)=0$.

当 $x>0$ 时， $y=2020^x, y=-2020^{-x}, y=\log_{2020}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 都为增函数，

所以当 $x>0$ 时， $F(x)$ 递增，所以 $F(x)$ 在 R 上为增函数.

由 $f(2x+1)+f(x+1)-2>0$，得 $f(2x+1)-1+f(x+1)-1>0$，

即 $F(2x+1)+F(x+1)>0$，所以 $2x+1+x+1>0$，解得 $x>-\dfrac{2}{3}$.

所以不等式的解集为 $\left(-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.故选：C

专题 06　函数的奇偶性、对称性

【方法点拨】

1. 若单调奇函数 $f(x)$满足 $f(a)+f(b)=0$，则 $a+b=0$.一般的，若单调函数 $f(x)$关于点$(m，n)$对称，且满足 $f(a)+f(b)=2n$，则 $a+b=2m$.
2. 对于具有对称性的函数零点问题，要注意检验充分性，以防增解.

【典型题示例】

例 1　设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m$ =__________.

【答案】2

【分析】本题解法较多，利用函数的奇偶性应当最为简单.将函数解析式适当作如下变形，

$f(x)=\dfrac{(x^2+1)+2x+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，设 $g(x)=f(x)-1=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，显然 $g(x)$ 为奇函数，由题意知其最大值、最小值一定存在，根据函数图象的对称性，最大值与最小值互为相反数，其和为 0，所以，本题应填 2.

点评:

1. 本题欲求最大值与最小值的和，上述解法没有运用常规的求最值的基本工具，如：求导、基本不等式、单调性、反解等，而是充分利用函数的性质——奇偶性，舍弃解析式其外在的“形”转而研究函数的“性”，这种策略和方法在解题中经常涉及. 由于考生受定势思维的影响，此类题目多为考生所畏惧.

2. 发现函数隐藏的单调性、对称性是解决此类问题之关键，对于单调奇函数有下列性质：若单调奇函数 $f(x)$满足 $f(a)+f(b)=0$，则 $a+b=0$.更一般的，若单调函数 $f(x)$关于点$(m，n)$对称，且满足 $f(a)+f(b)=2n$，则 $a+b=2m$.

例 2　设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$，数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$(　　)

A. 0　　　　B. 7　　　　C. 14　　　　D. 21

【答案】D

【分析】根据函数值之和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$ 求自变量之和 $a_1+a_2+\cdots+a_7$，很自然会去考虑函数的性质，而等式常常考查对称性，从而尝试去寻求函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 的对称中心.

函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 可以视为由 $y=(x-3)^3$ 与 $y=x-1$ 构成，它们的对称中心不一样，可以考虑对函数

的图象进行平移，比如 $f(x)-2=(x-3)^3+(x-3)$，引入函数 $F(x)=f(x+3)-2=x^3+x$，则该函数是奇函数，对称中心是坐标原点，由图象变换知识不难得出 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 的图象关于点 $(3,2)$ 中心对称.

【解析】∵ $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，且 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$

∴ $[(a_1-3)^3+a_1-1]+[(a_2-3)^3+a_2-1]+\cdots+[(a_7-3)^3+a_7-1]=14$

∴ $(a_1+a_2+\cdots a_7)-7=14$

∴ $a_1+a_2+\cdots a_7=21$

例 3　已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 a=(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

【答案】C

【分析】如果利用导数研究 $f(x)$ 的零点，就会小题大做，容易陷入困难. 由函数与方程思想，函数的零点满足 $2x-x^2=a\left(e^{x-1}+e^{1-x}\right)$.

设 $g\left(x\right)=e^{x-1}+e^{-x+1}=e^{x-1}+e^{-(x-1)}$，显然 $g\left(x\right)$ 是由函数 $y=e^x+e^{-x}$ 向右平移一个单位而得到，易知 $y=e^x+e^{-x}$ 是偶函数且在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是增函数. 故 $g\left(x\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称，且在 $\left[1,+\infty\right)$ 上是增函数，在 $\left(-\infty,1\right]$ 上是减函数，$g\left(x\right)_{\min}=g\left(1\right)=2$.

设 $h\left(x\right)=2x-x^2$，显然 $h\left(x\right)=2x-x^2$ 关于直线 $x=1$ 对称，顶点为 $\left(1,1\right)$.

若 $a<0$，则函数 $y=a\cdot g\left(x\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称，且在 $\left[1,+\infty\right)$ 上是减函数，在 $\left(-\infty,1\right]$ 上是增函数，最大值为 $2a$，$2a<h\left(x\right)_{\max}$.

若 $y=a\cdot g\left(x\right)$ 的图象与 $h\left(x\right)$ 的图象有一个公共点 A，根据对称性必有另一个公共点 B. 所以，$a<0$ 不合题意；

若 $a>0$，函数 $y=a\cdot g\left(x\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称，且在 $\left[1,+\infty\right)$ 上是增函数，在 $\left(-\infty,1\right]$ 上是减函数，最小值为 $2a$. 若 $y=a\cdot g\left(x\right)$ 的图象与 $h\left(x\right)$ 的图象只有一个公共点，必有 $2a=1$，得 $a=\frac{1}{2}$.

【解析】$f(x)=\left(x-1\right)^2+a(e^{x-1}+e^{-x+1})-1$，令 $g(x)=f(x+1)+1=x^2+a(e^x+e^{-x})$

则易知 $g(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称，欲使 $f(x)$ 有唯一零点，必有 $f(1)=0$，即 $2a-1=0$，

所以 $a=\frac{1}{2}$.

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2+2a\log_2(x^2+2)+a^2-3=0$ 有唯一解，则实数 a 的值为________.

【答案】1

【分析】利用隐藏的对称性，易得 $f(0)=0$，求得 $a=1$ 或 $a=-3$，再利用数形结合，将增解舍弃.

【解析】通过对函数 $f(x)=x^2+2a\log_2(x^2+2)+a^2-3$ 的研究，可发现它是一个偶函数，那么它的图象就关于 y 轴对称，若有唯一解，则该解必为 0.

将 $x=0$ 代入原方程中，可求得 $a=1$ 或 $a=-3$．这就意味着，当 $a=1$ 或 $a=-3$ 时，原方程必有一解 0，但是否是唯一解，还需进一步验证.

当 $a=1$ 时，原方程为 $x^2+2\log_2(x^2+2)-2=0$，即 $2\log_2(x^2+2)=2-x^2$，该方程实数根的研究可能过函数 $y=2\log_2t$ 和函数 $y=4-t$ 的交点情况来进行，不难发现，此时是符合题意的；而当 $a=-3$ 时，原方程为 $x^2-6\log_2(x^2+2)+6=0$，即 $x^2+6=6\log_2(x^2+2)$．通过研究函数 $y=4+t$ 和 $y=6\log_2t$ 可以发现，此时原方程不止一解，不合题意，需舍去.

点评：

$f(0)=0$ 仅是函数存在零点的必要条件，要注意检验充分性，一般是代入检验进行取舍.

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x)$是偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x-ax$，若函数 $f(x)$恰有 5 个零点，则实数 a 的取值范围是______________.

2. 若函数 $f(x)=x^2+2a|x|+4a^2-3$ 的零点有且只有一个，则实数 $a=$______________.

3. 若函数 $f(x)=x^2-m\cos x+m^2+3m-8$ 有唯一零点，则满足条件的实数 m 组成的集合为_______.

4. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$，$a\in R$，则函数 $f(x)$ 零点的个数所有可能值构成的集合为______.

5. 函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图象与函数 $y=2\sin\pi x(-2\le x\le 4)$ 的图像所有交点的横坐标之和等于( )

A.2　　B. 4　　C.6　　D.8

6. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$ ( )

A. 0　　B. m　　C. 2m　　D. 4m

7.(2020·江苏启东中学最后一卷·12)已知函数 $f(x)=\dfrac{2^{x+1}}{2^{x}+1}+\sin x$ 在区间 $[-k,k]$ 的值域为 $[m,n]$，则 $m+n$ 的值为______.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^{2}+\cos x-\sin x}{x^{2}+\cos x+1}$,在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M 最小值为 N 则 $M+N$＝_____.

9. 已知实数 x、y 满足 $\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)=1$，则 $x^{2}-3xy-4y^{2}-6x-6y+2020$ 的值是__________.

10.(2020·扬州中学五月考·13)圆 $x^{2}+y^{2}+6x-4y=0$ 与曲线 $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$ 相交于 A,B,C,D 点四点，O 为坐标原点，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=$______.

【答案或提示】

1.【答案】(0，e)

2.【答案】$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.【答案】m=2

【解法提示】发现$f(x)$是偶函数，故得到$f(0)=0$，立得m=2 或m=－4，难点在于对m=－4 的取舍问题.思路有二，一是"分离函数"，利用"形"助数；二是利用导数知识，只需当x＞0 时，函数恒增或恒减即可.

4.【答案】{0,1,2,4}

5.【答案】B

6.【答案】B

【分析】该题设计抽象函数$f(x)$关于点$(0,1)$成中心对称，函数$y=\frac{x+1}{x}$由奇函数$y=\frac{1}{x}$向上平移一个单位得到，

也关于点$(0,1)$成中心对称，因而两函数图象的交点为也关于点$(0,1)$成中心对称，$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum_{1}^{m}x_i+\sum_{1}^{m}y_i$，

考虑倒序相加法，可得$\sum_{1}^{m}x_i=0$，$\sum_{1}^{m}y_i=m$，故$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=m$.

7.【答案】2

【分析】本题的难点在于发现函数内隐藏的奇偶性、对称性.

【解析】因为$f(x)=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}+\sin x=\frac{\left(2^x-1\right)+\left(2^x+1\right)}{2^x+1}+\sin x=\frac{2^x-1}{2^x+1}+\sin x+1$

设$g(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}+\sin x$，则$g(x)$为定义在$R$上的单调递增函数

所以$f(x)$在区间$[-k,k]$单增，且关于点(0,1)对称，所以$m+n$=2.

8.【答案】2

【解析】$f(x)=\frac{(x+1)^2+\cos x-\sin x}{x^2+\cos x+1}=\frac{x^2+2x+1+\cos x-\sin x}{x^2+\cos x+1}=1+\frac{2x-\sin x}{x^2+\cos x+1}$.

$\because$ 令$g(x)=\frac{2x-\sin x}{x^2+\cos x+1}$

$g(-x)=\frac{-2x+\sin x}{x^2+\cos x+1}=-g(x)$,且$x\in[-1,1]$,$\therefore$ $g(x)$为奇函数,

设其最大值为a,则其最小值为$-a$,

$\therefore$函数$f(x)$的最大值为$a+1$,最小值为$-a+1$

$\therefore \begin{cases} a+1=M \\ -a+1=N \end{cases}$，$\therefore\ M+N=2$.故答案为: 2.

9.【答案】2020

【提示】两边取自然对数得 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=0$

设 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，则易得其为 R 上的单增奇函数，所以 $x+y=0$，

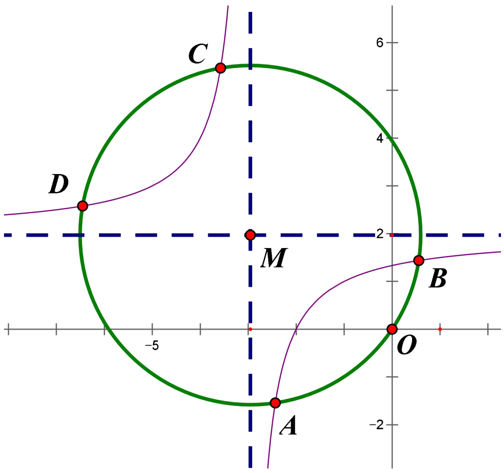
故 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+2020=(x+y)(x-4y)-6(x+y)+2020=2020$.

10.【分析】注意发现圆与一次分式函数 $y=\dfrac{2x+4}{x+3}$ 的图象均关于点 $(-3,2)$ 对称，利用三角形中线的向量表示，将所求转化即可.

【解析】由圆方程 $x^2+y^2+6x-4y=0$，可得 $(x+3)^2+(y-2)^2=13$，圆心坐标为 $(-3,2)$

$y=\dfrac{2x+4}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-2}{x+3}=2-\dfrac{2}{x+3}$，其对称中心为 $(-3,2)$.

在同一直角坐标系中，画出圆和函数图像如图所示:



数形结合可知，圆和函数都关于点 $M(-3,2)$ 对称，

故可得其交点 A 和 C，B 和 D 都关于点 $M(-3,2)$ 对称.

故 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$，所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=4\left|\overrightarrow{OM}\right|=4\sqrt{13}$.

专题07　函数的奇偶性、对称性、周期性

【方法点拨】

1.函数奇偶性、对称性间关系：

(1)若函数 $y=f(x+a)$是偶函数，即 $f(a-x)=f(a+x)$，则函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称；一般的，若对于 **R** 上的任意 x 都有 $f(a-x)=f(a+x)$，则 $y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称.

(2)若函数 $y=f(x+a)$是奇函数，即 $f(-x+a)+f(x+a)=0$，则函数 $y=f(x)$关于点$(a，0)$中心对称；一般的，若对于 **R** 上的任意 x 都有 $f(-x+a)+f(x+a)=2b$，则 $y=f(x)$的图象关于点$(a，b)$中心对称.

2. 函数对称性、周期性间关系：

若函数有多重对称性，则该函数具有周期性且最小正周期为相邻对称轴距离的 2 倍，为相邻对称中心距离的 2 倍，为对称轴与其相邻对称中心距离的 4 倍.

(注：如果遇到抽象函数给出类似性质，可以联想 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的对称轴、对称中心和周期之间的关系)

3. 善于发现函数的对称性(中心对称、轴对称)，有时需将对称性与函数的奇偶性相互转化.

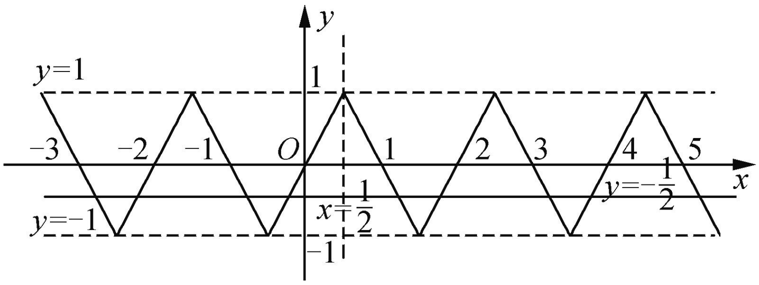
【典型题示例】

例 1　(2019·江苏启东联考)已知函数 $f(x)$对任意的 $x\in R$，都有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，函数 $f(x+1)$是奇函数，当$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)=2x$，则方程 $f(x)=-\frac{1}{2}$在区间$[-3,5]$内的所有根之和为________.

【答案】4

【分析】由 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$对任意的 $x\in R$ 恒成立，得 $f(x)$关于直线 $x=\frac{1}{2}$对称，由函数 $f(x+1)$是奇函数，$f(x)$关于点$(1,0)$中心对称，根据函数对称性、周期性间关系，知函数 $f(x)$的周期为 2，作出函数 $f(x)$的图象即可.

【解析】因为函数 $f(x+1)$是奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，又因为 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，所以 $f(1-x)=f(x)$，所以 $f(x+1)=-f(x)$，即 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，所以 函数 $f(x)$的周期为 2，且图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$对称．作出函数 $f(x)$的图象如图所示，



由图象可得 $f(x)=-\frac{1}{2}$在区间$[-3,5]$内有 8 个零点，且所有根之和为$\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

例 2　已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$

A．-50　　B．0　　C．2　　D．50

【答案】C

【分析】同例 1 得 $f(x)$的周期为 4，故 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=\cdots=f(45)+f(46)+f(47)+f(48)$，而 $f(1)=2$，$f(2)=f(0)=0$($f(1-x)=f(1+x)$中，取 $x=1$)、$f(3)=f(-1)=-f(1)=-2$、$f(4)=f(0)=0$，故 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=\cdots=f(45)+f(46)+f(47)+f(48)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=f(47)+f(48)=f(1)+f(2)=2$.

例 3　已知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的奇函数，对任意 $x\in R$，都有 $f(2-x)=f(x)+f(2)$成立，当 x_1，$x_2\in[0,1]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则下列结论正确的有(　　)

A．$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2019)=0$

B．直线 $x=-5$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

C．函数 $y=f(x)$ 在$[-7,7]$上有 5 个零点

D．函数 $y=f(x)$ 在$[-7,-5]$上为减函数

【分析】根据题意，利用特殊值法求出 $f(2)$的值，进而分析可得 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数和 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上为增函数，据此分析选项即可得答案.

【解答】解：根据题意，函数 $y=f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $f(0)=0$；

对任意 $x\in R$，都有 $f(2-x)=f(x)+f(2)$成立，当 $x=2$ 时，有 $f(0)=2f(2)=0$，则有 $f(2)=0$，

则有 $f(2-x)=f(x)$，即 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴；

又由 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(2-x)=-f(-x)$，变形可得 $f(x+2)=-f(x)$，则有 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

故函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，

当 x_1，$x_2\in[0,1]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上为增函数，

又由 $y=f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $f(x)$ 在区间$[-1,1]$上为增函数；

据此分析选项：

对于 A，$f(x+2)=-f(x)$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=[f(1)+f(3)]+[f(2)+f(4)]=0$，

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2019)=504\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+(3)=f(2)=0$，$A$ 正确；

对于 B，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，且函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 $x=5$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，

又由函数为奇函数，则直线 $x=-5$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴，B 正确；

对于 C，函数 $y=f(x)$ 在 $[-7，7]$ 上有 7 个零点：分别为 -6，-4，-2，0，2，4，6；C 错误；

对于 D，$f(x)$ 在区间 $[-1，1]$ 上为增函数且其周期为 4，函数 $y=f(x)$ 在 $[-5，-3]$ 上为增函数，

又由 $x=-5$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，则函数 $y=f(x)$ 在 $[-7，-5]$ 上为减函数，D 正确；

故选：ABD.

【巩固训练】

1．已知函数 $f\left(x\right)=(\frac{1}{2})^{|x-a|}$ 关于 $x=1$ 对称,则 $f\left(2x-2\right)\geq f\left(0\right)$ 的解集为_____.

2．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=-f(3-x)$，且 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\lg\frac{x}{4-x}$ 的图象有四个交点，则这四个交点的横纵坐标之和等于__________.

3.已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x),f(4+x)=f(4-x)$，且 $-3<x\leq 3$ 时，$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $f(2018)=$（　　）

A．0　　B．1　　C．$\ln(\sqrt{5}-2)$　　D．$\ln(\sqrt{5}+2)$

4.已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x-4)=-f(x)$，且在区间[0，2]上是增函数，若方程 $f(x)=m(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$__________.

5. (多选题)已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，且函数 $f(x+2)$ 为偶函数，下列结论正确的是(　　　　)

A．函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　B．$f(4)=0$

C．$f(x+8)=f(x)$　　D．若 $f(-5)=-1$，则 $f(2019)=-1$

6．(多选题)函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x-1)$ 与 $f(x-2)$ 都为偶函数，则(　　)

A．$f(x)$ 为偶函数　　B．$f(x+1)$ 为偶函数

C．$f(x+2)$ 为奇函数　　D．$f(x)$ 为同期函数

7.若定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，$f\left(x+1\right)$ 是奇函数，现给出下列 4 个论断：

① $f\left(x\right)$ 是周期为 4 的周期函数；② $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,0\right)$ 对称；

③ $f\left(x\right)$ 是偶函数；　　④ $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(-2,0\right)$；

其中正确论断的个数是____________.

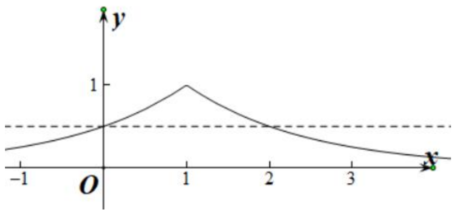
第 40 页 共 153 页

【答案或提示】

1. 【答案】$[1,2]$

【解析】$\because$函数 $f\left(x\right)=(\frac{1}{2})^{|x-a|}$ 关于 $x=1$ 对称,$\therefore$ $a=1, f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$,

则由 $f\left(2x-2\right)\geq f\left(0\right)=\frac{1}{2}$,结合图象可得 $0\leq 2x-2\leq 2$,求得 $1\leq x\leq 2$.



2. 【答案】8

【解析】$g(x)=\lg\frac{x}{4-x}$，故 $g(4-x)=-g(x)$，即 $y=g\left(x\right)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，又函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=-f(3-x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以四个交点的横纵坐标之和为 8.

3.【答案】D

【解析】因为 $f\left(1+x\right)=f\left(1-x\right), f\left(4+x\right)=f\left(4-x\right)$,

所以 $f(x)=f(2-x), f(x)=f(8-x) \therefore f(2-x)=f(8-x) \therefore T=8-2=6,$

$\therefore f(2018)=f(2)=\ln(2+\sqrt{5})$.

4.【答案】−8

5.【答案】BCD

6.【答案】ABD

7.【答案】3

【解析】命题①：由 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，得：$f\left(x+4\right)=-f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 4，故①正确；

命题②：由 $f\left(x+1\right)$ 是奇函数，知 $f\left(x+1\right)$ 的图象关于原点对称，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,0\right)$ 对称，故②正确；

命题③：由 $f\left(x+1\right)$ 是奇函数，得：$f\left(1+x\right)=-f\left(1-x\right)$，

又 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，

所以 $f\left(-x\right)=-f\left(-x+2\right)=-f\left(1+1-x\right)=f\left(1-\left(1-x\right)\right)=f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，故③正确；

命题④：$f\left(-2\right)=-f\left(-2+2\right)=-f\left(0\right)$，

无法判断其值，故④错误.综上，正确论断的序号是：①②③.

专题 08　三次函数的对称性、穿根法作图象

【方法点拨】

对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(其中 $a\neq0$)，给出以下常用结论：

(1)当 $a>0$，$b^2-3ac>0$ 时，三次函数的图象为 N 字型；当 $a<0$，$b^2-3ac>0$ 时，三次函数的图象为反 N 字型；当 $a>0$，$b^2-3ac\leq0$ 时，单调递增，当 $a<0$，$b^2-3ac\leq0$ 时，单调递减.

(2)三次函数有对称中心$(x_0,f(x_0))$，$f''(x_0)=0$.

【典型题示例】

例 1 函数 $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$ 图象的对称中心为_____.

【答案】$(1,2)$

【解析一】由题意设对称中心的坐标为(a,b)，则有 $2b=f(a+x)+f(a-x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立，代入函数解析式得，

$$2b=(a+x)^3-3(a+x)^2+5(a+x)-1+(a-x)^3-3(a-x)^2+5(a-x)-1$$

整理得到：

$$2b=(a+x)^3-3(a+x)^2+5(a+x)-1+(a-x)^3-3(a-x)^2+5(a-x)-1，$$

整理得到 $2b=(6a-6)x^2+2a^3-6a^2+10a-2=0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立，

所以 $\begin{cases}6a-6=0\\2a^3-6a^2+10a-2=2b\end{cases}$，所以 $a=1$，$b=2$.

即对称中心$(1,2)$.

【解析二】∵$f''(x)=6x-6$　　令 $f''(x)=6x-6=0$　　解得 $x=1$

将 $x=1$ 代入得 $f(x)$得 $f(1)=2$　　∴对称中心$(1,2)$.

例 2　已知 $a^3-3a^2+5a=1$，$b^3-3b^2+5b=5$，那么 $a+b$ 的值是__________.

【答案】2

【分析】本题的难点在于发现函数的对称性、变形为“结构相同”后逆用函数的单调性.

【解析】由题意知 $a^3-3a^2+5a-3=-2$，$b^3-3b^2+5b-3=2$，

设 $f(x)=x^3-3x^2+5x-3$，则 $f(a)=-2$，$f(b)=2$.

因为 $f(x)$图象的对称中心为$(1,0)$，所以 $a+b=2$.

例 3　若函数 $f(x)=x^2|x-a|$ 在区间$[0,2]$上单调递增，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

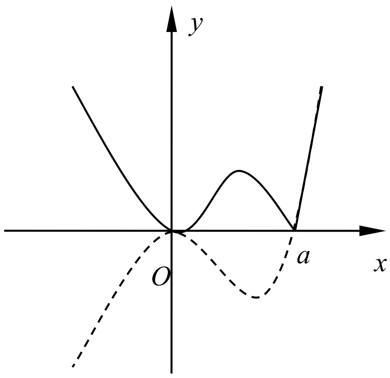
【解析】 $f(x)=x^2|x-a|=\begin{cases}x^2(x-a),x\geq a\\-x^2(x-a),x<a\end{cases}$.

函数 $f(x)$ 的一个极值点是 $x=0$，所以以 0 为界与 a 比较，进行分类讨论.

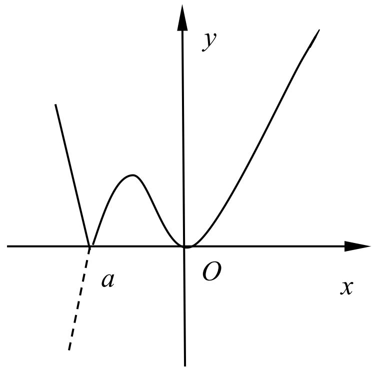
①当 $a>0$ 时，如图一，由 $f'(x)=-3x^2+2ax=0$ 得， $x=0$ 或 $x=\dfrac{2a}{3}$，欲使函数 $f(x)=x^2|x-a|$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，只需 $x=\dfrac{2a}{3}\geq 2$，即 $a\geq 3$.

②当 $a\leq 0$ 时，如图二， $f(x)=x^2|x-a|$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，满足题意.

综上知，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.



（图一）



（图二）

点评：

作三次函数 $f(x)=a(x-x_1)^2(x-x_2)$(其中 $a\neq 0$，$x_1\neq x_2$)示意图的方法要点有二：

(1) 当 $a>0$ 时，三次函数的图象为 N 字型(最右区间增)；当 $a<0$ 时，三次函数的图象为反 N 字型(最右区间减).

(2) x_1 既是函数的零点，又是函数的极值点，从形上看，函数图象此时与 x 轴相切(或称“奇穿偶回”，即 x_1、x_2 都是函数的零点，x_1 是二重根，图象到此不穿过 x 轴，即“回”，这种作函数图象的方法称为“穿根法”).

例 4 (2020·浙江·9)已知 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$，若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geq 0$ 在 $x\geq 0$ 上恒成立，则(　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $b<0$　　D. $b>0$

【答案】C

【分析】本题的实质是考察三次函数的图象，设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-2a-b)$，欲满足题意，从形上看则必须在 $x\geq 0$ 时有两个重合的零点才可以，对 a 分 $a>0$ 与 $a<0$ 两种情况讨论，结合三次函数的性质分析即可得到答案.

【解析】因为 $ab\neq 0$，所以 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-2a-b)$，则 $f(x)$ 的零点为

$x_1=a,x_2=b,x_3=2a+b$

当 $a>0$ 时，则 $x_2<x_3$， $x_1>0$，要使 $f(x)\geq 0$，必有 $2a+b=a$，且 $b<0$，即 $\boldsymbol{b=-a}$，且 $b<0$，所以 $b<0$；

当 $a<0$ 时，则 $x_2>x_3$， $x_1<0$，要使 $f(x)\geq 0$，必有 $b<0$.

综上一定有 $b<0$.

故选：C

【巩固训练】

1. 已知直线 l 与曲线 $y=x^3-x+1$ 有三个不同的交点 $A\left(x_1,y_1\right)$， $B\left(x_2,y_2\right)$， $C\left(x_3,y_3\right)$，且 $|AB|=|AC|$，则 $\sum_{i=1}^{3}\left(x_i+y_i\right)=$__________.

2. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为____________.

3.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=ax(x+2)(x-a)$ $(a\neq 0)$，若函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取到极小值，则实数 a 的取值范围是__________.

4. 若函数 $f(x)=(x-2)^2\left|x-a\right|$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是________.

5. 设 $a\in\mathbf{R}$，若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$，则 $a=$______________.

6. 已知函数 $f(x)=x\left|x^2-3\right|$， $x\in\left[0,m\right]$，其中 $m\in R$，且 $m>0$，如果函数 $f(x)$ 的值域是 $\left[0,2\right]$，则实数 m 的取值范围为________.

7.已知 $a\in R$，函数 $f(x)=x^2\left|x-a\right|$，求函数 $y=f(x)$在区间[1,2]上的最小值.

8. 已知函数 $f(x)=x\left|x^2-12\right|$ 的定义域是 $[0,m]$， 值域是 $[0,am^2]$，则实数 a 的取值范围是_______________.

【答案或提示】

1.【答案】3

【解析】由题意，函数 $y=x^3-x$ 是奇函数，则函数 $y=x^3-x$ 的图象关于原点对称，

所以函数 $y=x^3-x+1$ 的函数图象关于点 $(0,1)$ 对称，

因为直线 l 与曲线 $y=x^3-x+1$ 有三个不同的交点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),C\left(x_3,y_3\right)$，

且 $|AB|=|AC|$，

所以点 A 为函数的对称点，即 $A(0,1)$，且 B,C 两点关于点 $A(0,1)$ 对称，

所以 $x_1+x_2+x_3=0,y_1+y_2+y_3=3$，于是 $\sum_{i=1}^{3}\left(x_i+y_i\right)=3$.

2.【答案】-3

【解析】因为 $f(0)=1$，且由 $f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-\frac{1}{3}a)=0$ 得：$x=0$ 或 $x=\frac{1}{3}a$

所以函数 $f(x)$ 的图象是增-减-增型，且在 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{3}a$ 处取得极值

欲使函数在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，当且仅当 $\begin{cases} f(\frac{a}{3})=2\cdot(\frac{a}{3})^3-a\cdot(\frac{a}{3})^2+1=0 \\ \frac{a}{3}>0 \end{cases}$

解之得 $a=3$.

当 $x\in\left[-1,0\right]$ 时，$f(x)$ 增；$x\in\left[0,1\right]$ 时，$f(x)$ 减，

故 $f(x)_{\max}=f(0)=1$，$f(x)_{\min}=\min\left\{f(1),f(-1)\right\}=-4$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为 -3.

3.【答案】$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

4.【答案】$(-\infty,2]\bigcup[5,+\infty)$

5.【答案】$a=\frac{3}{2}$

6.【答案】$1\le m\le 2$

7.【分析】对 a 进行讨论，结合函数的一阶导数值判断函数在区间上的单调性，进而求出函数的最小值.

【解析】设此最小值为 m.

①当 $a\le 1$时，在区间[1,2]上，$f(x)=x^3-ax^2$.

因为: $f^{/}(x)=3x2-2ax=3x(x-\frac{2}{3}a)>0,x\in(1,2)$,

则 f(x)是区间[1,2]上的增函数,所以 m=f(1)=1-a..

②当 1<a≤ 2时，在区间[1,2]上，$f(x)=x^2|x-a|\ge 0$,由$f(a)=0$知:$m=f(a)=0$.

③当 a>2 时，在区间[1，2]上，$f(x)=ax^2-x^3$. $f^{/}(x)=2ax-3x^2=3x(\frac{2}{3}a-x)$.

若$a\ge 3$, 在区间(1，2)内 f'(x)>0,从而 f(x)为区间[1，2]上的增函数，由此得：m=f(1)=a-1.

若 2<a<3,则$1<\frac{2}{3}a<2$

当$1<x<\frac{2}{3}a$时, $f^{/}(x)>0$, 从而$f(x)$为区间$[1,\frac{2}{3}]$上的增函数;

当$\frac{2}{3}<x<2$时，从而$f^{/}(x)$为区间$[\frac{2}{3}a,2]$上的减函数.

因此，当 2<a<3 时，m=f(1)=a-1 或 m=f(2)=4(a-2).

当$2<a\le\frac{7}{3}$时,$4(a-2)\le a-1$,故$m=4(a-2)$;

当$\frac{7}{3}<a<3$时，$a-1<4(a-2)$,故$m=a-1$.

综上所述，所求函数的最小值$m=\begin{cases}1-a,\text{当}a\le 1\text{时};\\0,\text{当}1<a\le 2\text{时};\\4(a-2),\text{当}2<a\le\frac{7}{3}\text{时};\\a-1,\text{当}a>\frac{7}{3}\text{时};\end{cases}$

8.【答案】$a\ge 1$

【解析一】易知：当 $0\le x\le 2$，$f(x)$ 增；当 $2\le x\le 2\sqrt{3}$，$f(x)$ 减；当 $x\ge 2\sqrt{3}$，$f(x)$ 增，且 $f(2)=f(4)=16$．

① 当 $0<m\le 2$ 时，$f(x)$ $[0,m]$ 增

$\therefore -m(m^2-12)=am^2$，$a=-m+\dfrac{12}{m}\in[4,+\infty)$；

② 当 $2<m\le 4$ 时，$am^2=16$，$a=\dfrac{16}{m^2}\in[1,4)$；

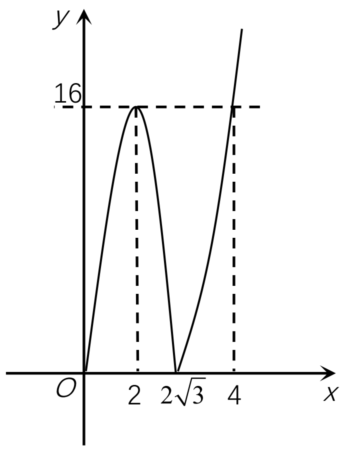
③ 当 $m\ge 4$ 时，$m(m^2-12)=am^2$，$a=m-\dfrac{12}{m}\in(1,+\infty)$；

综上，$a\ge 1$．

【解析二】仅考虑函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时的情况，可知 $f(x)=\begin{cases}12x-x^3, & x<2\sqrt{3},\\ x^3-12x, & x\geqslant 2\sqrt{3}.\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时，取得极大值 16．

令 $x^3-12x=16$，解得，$x=4$．

作出函数的图象(如右图所示).



函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $[0,\ am^2]$，分为以下情况考虑：(1) 当 $0<m<2$ 时，函数的值域为 $[0,\ m(12-m^2)]$，有 $m(12-m^2)=am^2$，所以 $a=\dfrac{12}{m}-m$，因为 $0<m<2$，所以 $a>4$；(2)当 $2\leqslant m\leqslant 4$ 时，函数的值域为 $[0,16]$，有 $am^2=16$，所以 $a=\dfrac{16}{m^2}$，因为 $2\leqslant m\leqslant 4$，所以 $1\leqslant a\leqslant 4$；(3)当 $m>4$ 时，函数的值域为 $[0,\ m(m^2-12)]$，有 $m(m^2-12)=am^2$，所以 $a=m-\dfrac{12}{m}$，因为 $m>4$，所以 $a>1$；综上所述，实数 a 的取值范围是 $a\geqslant 1$．

专题 09　利用图象求解函数零点问题

【方法点拨】

1. 函数的零点就是函数图象与 x 轴交点的横坐标，解决实际问题时，往往需分离函数，将零点个数问题转化为两个函数图象交点个数问题，将零点所在区间问题，转化为交点的横坐标所在区间问题.

2. 利用图象法解决零点问题，分离函数的基本策略是：一静一动，一直一曲，动直线、静曲线.

3. 利用图象法解决零点问题时，作图时要注意运用导数等相关知识分析函数的单调性、奇偶性、以及关键点线(如渐进线)，以保证图像的准确.

【典型题示例】

例 1　(2020 •天津 •9)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\quad 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|$ ($k\in R$)恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是(　　)

A. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　B. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,2\sqrt{2})$

C. $(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　D. $(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

【答案】D

【分析】由 $g(0)=0$，结合已知，将问题转化为 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$ 有 3 个不同交点，分 $k=0,k<0,k>0$ 三种情况，数形结合讨论即可得到答案.

【解析】注意到 $g(0)=0$，所以要使 $g(x)$ 恰有 4 个零点，只需方程 $|kx-2|=\dfrac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3 个实根即可，

令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$，即 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 3 个不同交点.

因为 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$，

当 $k=0$ 时，此时 $y=2$，如图 1，$y=2$ 与 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$ 有 2 个不同交点，不满足题意；

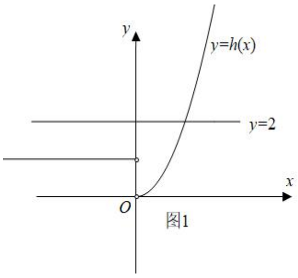
当 $k<0$ 时，如图 2，此时 $y=|kx-2|$ 与 $h(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$ 恒有 3 个不同交点，满足题意；

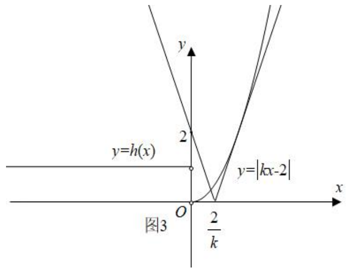
当 $k>0$ 时，如图 3，当 $y=kx-2$ 与 $y=x^2$ 相切时，联立方程得 $x^2-kx+2=0$，

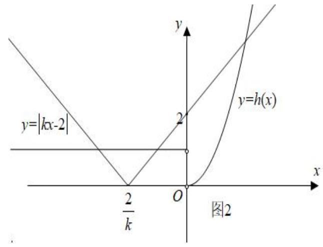
令 $\Delta=0$ 得 $k^2-8=0$，解得 $k=2\sqrt{2}$（负值舍去），所以 $k>2\sqrt{2}$.

综上，k 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

故选：D.







点评：

本题是一道由函数零点个数求参数的取值范围的问题，其基本思路是运用图象，将零点个数问题转化为两函数图象交点个数，考查函数与方程的应用、数形结合思想、转化与化归思想、导数知识、一元二次方程、极值不等式、特值等进行分析求参数的范围.

例 2 (2020·江苏镇江三模·13)已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}，x\le 1\\ \sqrt{-x^{2}+4x-3},1<x<3\end{cases}$，若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-k\left|x+2\right|$ 有三个零点，则实数 k 的取值范围是__________.

【答案】$\left(0,\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\cup\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{\mathrm{e}}{3}\right]$

【解析】作 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},x\le 1\\ \sqrt{-x^{2}+4x-3},1<x<3\end{cases}$ 与 $y=k\left|x+2\right|$ 图象,

由 $\sqrt{-x^{2}+4x-3}=k(x+2),k>0,x>-2$ 得 $(k^{2}+1)x^{2}+(4k^{2}-4)x+4k^{2}+3=0$

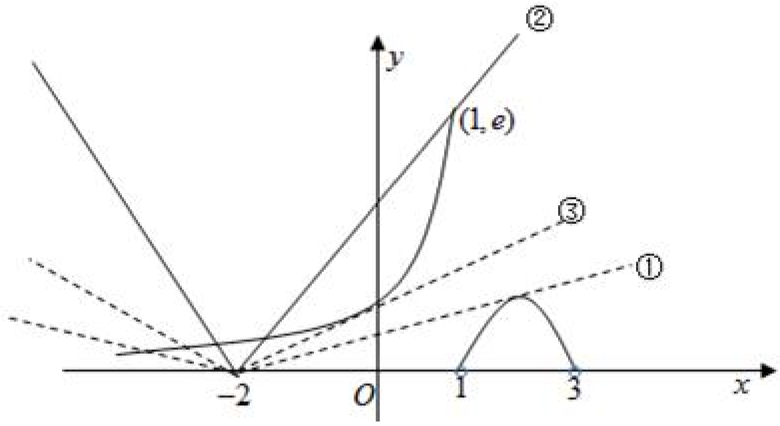
由 $\Delta=(4k^{2}-4)^{2}-4(k^{2}+1)(4k^{2}+3)=0$ 得 $k^{2}=\frac{1}{15}\ \because\ k>0\therefore k=\frac{\sqrt{15}}{15}$,

对应图中分界线①;

由 $y=k(x+2),k>0,x>-2$ 过点 $(\mathbf{1},\boldsymbol{e})$ 得 $k=\frac{e}{3}$，对应图中分界线②;

当 $y=k(x+2),k>0,x>-2$ 与 $y=e^{x}$ 相切于 $(x_{0},e^{x_{0}})$ 时，因为 $y'=\mathrm{e}^{x}$，所以

$k=e^{x_{0}}=k(x_{0}+2)\ \because\ k>0\therefore x_{0}=-1,k=\frac{1}{e}$，对应图中分界线③;



因为函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-k\left|x+2\right|$ 有三个零点，所以实数 k 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{15}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{e}{3}\right]$

故答案为：$\left(0,\dfrac{\sqrt{15}}{15}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{e}{3}\right]$

例3　(2020·江苏南通基地校一联考·14)已知函数 $f(x)=x^2-(m+1)x-1$ 与 $g(x)=\ln x-2x-2m$ 的零点分别为 x_1，x_2 和 x_3，x_4．若 $x_1<x_3<x_2<x_4$，则实数 m 的取值范围是__________．

【答案】$(-\infty,-1)$

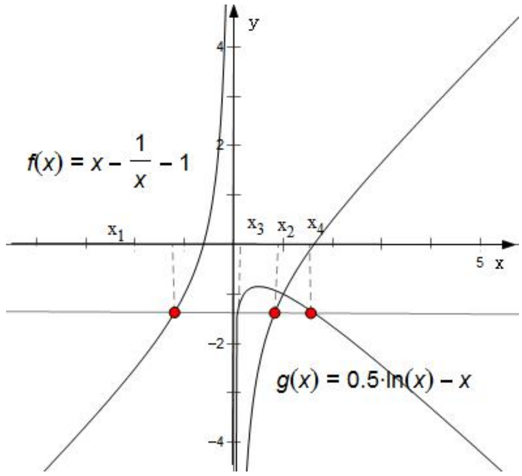
【分析】将问题转化为函数 $y=m$ 与函数 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-1$ 和 $e(x)=\dfrac{1}{2}\ln x-x$ 交点的大小问题，作出函数图像，观察图像可得结果.

【解析】由 $f(x)=x^2-(m+1)x-1=0$，得 $m=x-\dfrac{1}{x}-1$，

对于函数 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-1$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

由 $g(x)=\ln x-2x-2m=0$，得 $m=\dfrac{1}{2}\ln x-x$，

对于 $e(x)=\dfrac{1}{2}\ln x-x$，$y'=\dfrac{1}{2x}-1=\dfrac{1-2x}{2x}$ 得 $y=\dfrac{1}{2}\ln x-x$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，最大值为 $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}$，其图像如图，



令 $x-\frac{1}{x}-1=\frac{1}{2}\ln x-x$ 得 $A(1,-1)$，要 $x_1<x_3<x_2<x_4$，则直线 $y=m$ 要在 A 点下方，

$\therefore m<-1$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$．

例 4　(2020·江苏七市(南通、泰州、扬州、徐州、淮安、连云港、宿迁)三模·13)已知函数 $f(x)=\begin{cases}k(1-\frac{2}{x}),\ x<0\\ x^2-2k,\ x\geq 0\end{cases}$，

若函数 $g(x)=f(-x)+f(x)$ 有且仅有四个不同的零点，则实数 k 的取值范围是_______.

【答案】(27，+∞)

【解析】易知 $g(x)=f(-x)+f(x)$ 是偶函数，

问题可转化为 $g(x)=x^2+\frac{2k}{x}-k,\ x>0$ 有且仅有两个不同的零点.

分离函数得 $\frac{1}{k}x^2=-\frac{2}{x}+1\left(x>0\right)$，由图形易知 $k>0$，

问题进一步转化为 $y=\frac{1}{k}x^2$、$y=-\frac{2}{x}+1\left(x>0\right)$ 有两个交点问题.

设两个函数图象的公切点为 $\left(x_0,-\frac{2}{x_0}+1\right)\left(x_0>0\right)$

则 $\begin{cases}\frac{2}{{x_0}^2}=\frac{2}{k}x_0\\ -\frac{2}{x_0}+1=\frac{1}{k}{x_0}^2\\ x_0>0\end{cases}$，解得 $x_0=3$，

所以当 $\frac{1}{k}{x_0}^2<-\frac{2}{x_0}+1$ 时，即 $k>27$ 时，上述两个函数图象有两个交点

综上所述，实数 k 的取值范围是(27，+∞)．

例 5 (2020·江苏南通五月模拟·13)已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^x}+mx^2, & x<0,\\ e^x+mx^2, & x>0,\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 有四个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty,-\dfrac{e^2}{4})$

【解析】$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^x}+mx^2, & x<0,\\ e^x+mx^2, & x>0\end{cases}$ 是偶函数，问题转化为 $e^x+mx^2=0$，即 $e^x=-mx^2$（$x>0$）有两个零点

易知 $m<0$，两边均为曲线，较难求解.

两边取自然对数，$x=\ln(-m)+2\ln x$，即 $x-\ln(-m)=2\ln x$

问题即为：$g(x)=x-\ln(-m)$ 与 $h(x)=2\ln x$ 有两个交点

先考察直线 $y=x+b$ 与 $h(x)=2\ln x$ 相切，即只有一点交点的"临界状态"

设切点为 $(x_0,2\ln x_0)$，则 $h'(x_0)=\dfrac{2}{x_0}=1$，解得 $x_0=2$，此时切点为 $(2,2\ln 2)$

代入 $b=2\ln 2-2$

再求 $g(x)=x-\ln(-m)$ 与 $h(x)=2\ln x$ 有两个交点时，m 的取值范围

由图象知，当 $g(x)=x-\ln(-m)$ 在直线 $y=x+b$ 下方时，满足题意

故 $-\ln(-m)<b=2\ln 2-2$，解之得 $m<-\dfrac{e^2}{4}$，此时也符合 $m<0$

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-\dfrac{e^2}{4})$.

点评：

取对数的目的在于"化双曲为一直一曲"，简化了运算、难度，取对数不影响零点的个数.

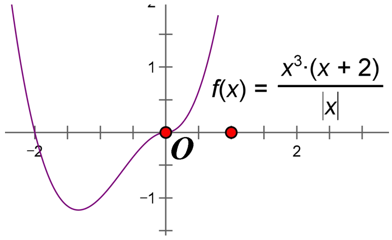
例 6 若函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}-kx^3$ 有三个不同的零点，则实数 k 的取值范围为____________.

【答案】 $(-\infty,-\dfrac{27}{32})\cup(0,+\infty)$

【分析】本题的难点是"分离函数"，函数分离的是否恰当、易于进一步解题，是分离时应综合考虑的重要因素，也是学生数学素养、能力的综合体现.本例中，可将已知变形为下列多种形式：$\dfrac{|x|}{x+2}=kx^3$ $\dfrac{|x|}{x(x+2)}=kx^2$、$\dfrac{|x|}{x^3}=k(x+2)$，$\dfrac{1}{k}=\dfrac{x^3(x+2)}{|x|}$，•••，但利用 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{x^3(x+2)}{|x|}$ 较简单.

【解析】易知 0 是函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}-kx^3$ 一个的零点，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x+2}-kx^3=0$ 可化为 $\dfrac{1}{k}=\dfrac{x^3(x+2)}{|x|}$，考虑 $y=\dfrac{1}{k}$

与 $g(x)=\dfrac{x^3(x+2)}{|x|}$ 有且只有两个非零零点．如下图，



利用导数知识易得：$g(x)_{\min}=g(-\dfrac{4}{3})=-\dfrac{32}{27}$

由图象得：$-\dfrac{32}{27}<\dfrac{1}{k}<0$ 或 $\dfrac{1}{k}>0$，解之得： $k<-\dfrac{27}{32}$ 或 $k>0$

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-\dfrac{27}{32})\cup(0,+\infty)$．

例 7 (2020·南通基地校第三次联考・14)已知函数 $f(x)=\ln(e^{2|x|-4}+1)$，$g(x)=|x|+a-2$．若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不相等的实数解，则实数 a 的取值范围是_______．

【答案】$\left(\ln 2,\ln(e^4+1)-2\right)$

【分析】从结构上看，首先考虑“对化指”，方程 $\ln(e^{2|x|-4}+1)=|x|+a-2\Leftrightarrow e^{2|x|-4}+1-e^{|x|+a-2}=0$，属于复合函数的零点问题，内函数是指数型，外函数是二次函数.设 $h(x)=e^{2|x|-4}+1-e^{|x|+a-2}$，$x\in R$，则 $h(x)$ 为偶函数，研究 “一半”， 令 $t=e^{x-2}$，$x>0$，则关于 t 的方程 $t^2-e^a t+1=0$ 在(e^{-2}， $+\infty$)内有两个不相等的实根，分离参数，利用“形”立得.

【解析】方程 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\ln(e^{2|x|-4}+1)=|x|+a-2\Leftrightarrow e^{2|x|-4}+1-e^{|x|+a-2}=0$

令 $h(x)=e^{2|x|-4}+1-e^{|x|+a-2}$， $x\in R$，则显然 $h(x)$ 为偶函数，

所以方程 $f(x)=g(x)$ 有四个实根 $\Leftrightarrow$ 函数 $h(x)=e^{2x-4}+1-e^{x+a-2}$，$x>0$ 有两个零点，

令 $t=e^{x-2}$，$x>0$，则关于 t 的方程 $t^2-e^a t+1=0$，

即 $e^a=t+\dfrac{1}{t}$ 在(e^{-2}， $+\infty$)内有两个不相等的实根，

结合函数 $y=t+\dfrac{1}{t}$， $t>e^{-2}$ 的图像，得 $2<e^a<e^2+e^{-2}$，

即 $\ln 2<a<\ln(e^4+1)-2$，

则实数 a 的取值范围是 $\left(\ln 2,\ln(e^4+1)-2\right)$．

【巩固训练】

1. 已知函数 $f(x)=e^x-2x+a$ 有零点，则实数 a 的取值范围是__________.

2. 已知函数 $f(x)=a(2a-1)e^{2x}-(3a-1)(x+2)e^x+(x+2)^2$ 有四个零点，则实数 a 的取值范围是__________ .

3. 已知 e 为自然对数的底数，若方程 $|x\ln x—ex+e|=mx$ 在区间 $[\frac{1}{\mathrm{e}},e^2]$ 上有三个不同实数根，则实数 m 的取值范围是

________.

4.已知关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x-2}=kx$ 有三个不同的实数解，则实数 k 的取值范围是______.

5．(2020·南通中学·二调)已知函数 $f(x)=x^2-(a+1)x-2$ 有两个零点 x_1,x_2，函数 $g(x)=\ln x-2x-a$ 有两个零点 x_3,x_4，满足 $x_1<x_3<x_2<x_4$，则实数 a 的取值范围为____________________ .

6. (2020 • 江苏天一中学 • 12 月考)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2e\ln x, x>0\\ x^3+x, x\le 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-ax^2$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

7.(2020·江苏徐州打靶卷·13)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, x\ge 0\\ \dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{2}e^x, x<0\end{cases}$，$g(x)=me^x$ (其中 m 是非零实数)，若函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个交点，则的取值范围为________.

8.(2020 • 河北衡水中学八调)已知函数 $f(x)=a(2a-1)e^{2x}-(3a-1)(x+2)e^x+(x+2)^2$ 有四个零点，则实数 a 的取值范围是__________.

A. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(1,\dfrac{e+1}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e+1}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{e+1}{2}\right)$

9．已知函数 $f(x)=|x-a|-\dfrac{3}{x}+a$，$a\in R$，若关于 x 的方程 $f(x)=2$ 有且仅有三个不同的实根，且它们成等差数列，则实数 a 取值的集合为__________.

【答案或提示】

1.【答案】$(-\infty,2\ln 2-2]$

2.【答案】$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{e+1}{2}\right)$

3.【答案】$\left[e-\frac{1}{e}-2,e-2\right)$

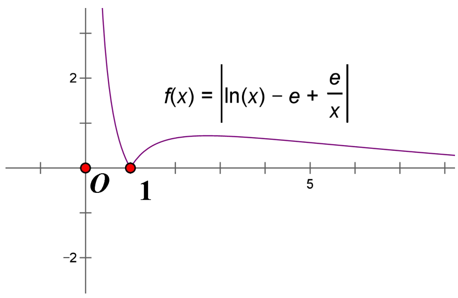
【解析】方程两边同时除以 x，令 $f(x)=\ln x-e+\frac{e}{x}$，问题转化为 $y=|f(x)|$ 与 $y=m$ 的图象在区间$[\frac{1}{\mathrm{e}},e^2]$上有三个交点.

$\because f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}$，

$\therefore$当 $x\in(\frac{1}{e},e)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 减；当 $x\in(e,e^2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 增.

故当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取得极小值，且 $f(e)=2-e<0$．又 $f(1)=0$，$f(\frac{1}{e})=e^2-e-1>0$，$f(e^2)=\frac{1}{e}-e+2<0$

作出 $y=|f(x)|$ 的图象，由图象知实数 m 的取值范围是：$\left[e-\frac{1}{e}-2,e-2\right)$.



4.【答案】$0<k<\frac{1}{2}$

【解析】$k=\begin{cases}\frac{1}{x-2},x>0\\-\frac{1}{x-2},x<0\\R,x=0\end{cases}$，画图得出 k 的取值范围．

5．【答案】$(-\infty,-2)$

6.【答案】$(0,1)\cup\{-2\}$

【提示】易知 0 是其中一个零点，问题转化为 $y=a$ 与函数 $k(x)=\begin{cases}\dfrac{2e\ln x}{x^2},x>0\\x+\dfrac{1}{x},x<0\end{cases}$ 有两个不同的零点.

7.【答案】 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[1,\dfrac{3}{e}\right)$

【提示】转化为函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{e^x},x\ge 0\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2},x<0\end{cases}$ 与函数 $G(x)=m$ 的图象有且仅有两个交点最简.

8.【答案】 D

【提示】$f(x)=\left[ae^x-(x+2)\right]\left[(2a-1)e^x-(x+2)\right]$，根据对称性，只需考察 $e^x=\dfrac{1}{a}(x+2)$ 有两个零点，得 $0<a<e$，

故有 $\begin{cases}0<a<e\\0<2a-1<e\\a\ne 2a-1\quad *\end{cases}$，前两者是保证两方程各自有两解，这里(*)易漏，它是保证两方程解不相同的.

9.【答案】 $\left\{-\dfrac{9}{5},\dfrac{5+3\sqrt{33}}{8}\right\}$

专题 10　平凡恒等式

【方法点拨】

平凡恒等式 $|a|+|b|=\max\{|a+b|,|a-b|\}$.

说明： 1. 平凡恒等式即三角不等式 $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$ 的延拓，其证明只需对 a、b 的符号分类讨论即可.

2. 遇到“双绝对值”问题使用平凡恒等式可实现“秒杀”.

【典型题示例】

例 1　函数 $f(x)=|\cos x|+|\cos 2x|$ 的最小值是__________.

【答案】 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

思路一：换元+奇偶性+去绝对值

$f(x)=|\cos x|+|\cos 2x|=|\cos x|+|2\cos^2 x-1|$ 是偶函数

设 $\cos x=t(-1\le t\le 1)$

则 $y=|t|+|2t^2-1|=\begin{cases}-2t^2+t+1,0\le t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2t^2-t-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 1\end{cases}$ (下略).

思路二：周期性+奇偶性+去绝对值

$f(x)=|\cos x|+|\cos 2x|$ 是偶函数，且其最小正周期是 π

$$f(x)=|\cos x|+|\cos 2x|=\begin{cases}2\cos^2 x+\cos x-1, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\\ -2\cos^2 x+\cos x+1, x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$ (下略).

思路三：平凡恒等式

$y=\max\{|\cos x+\cos 2x|,|\cos x-\cos 2x|\}$

设 $\cos x=t(-1\le t\le 1)$

则 $y=\max\{|2t^2+t-1|,|2t^2-t-1|\}$， $t\in[-1,1]$

由 $|2t^2+t-1|=|2t^2-t-1|$ 得 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时取得最小值

$y_{\min}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 2 (2016·浙江) 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若对任意单位向量 $\boldsymbol{e}$，均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\le\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值是________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|\le|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\le\sqrt{6}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|\le\sqrt{6}\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\le 6\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}\le\dfrac{1}{2}$，即最大值为 $\dfrac{1}{2}$.

【巩固训练】

1. 函数 $f(x)=|\sin x|+|\sin 3x|$ 的最大值是___________.

2. 在平面直角坐标系中，定义 $d(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点之间的“折线距离”，则椭圆上 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的一点 P 和直线 $4x+3y-12=0$ 上的一点 Q 的“折线距离”的最小值是___________.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若对任意单位向量 $\boldsymbol{e}$，均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\le\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值是________.

【答案或提示】

1.【答案】 2

2.【答案】 $3-\frac{\sqrt{41}}{4}$

3.【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $|(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}|\le|\vec{a}\cdot\vec{e}|+|\vec{b}\cdot\vec{e}|\le\sqrt{6}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|\le\sqrt{6}\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\le 6\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}\le\frac{1}{2}$，即最大值为 $\frac{1}{2}$.

专题 11　构造形求最值类问题

【方法点拨】

一般地，对于以下结构的问题需要注意其式子的几何意义：

(1) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$表示两点间的距离或向量的模；

(2) $k=\dfrac{y-b}{x-a}$表示过点(a,b)与(x,y)的直线的斜率；

(3) $Ax+By$与直线$Ax+By+C=0$的截距有关；

(4) $P(\cos\theta,\sin\theta)$表示单位圆$x^2+y^2=1$上的任意一点；

(5) $a^2\pm ab+b^2$与余弦定理有关，在解题过程中可以利用这些式子的几何意义构造一些特殊的函数.

【典型题示例】

例 1　(2021·江苏南京六校联合体期初)(多选题)已知$\ln x_1-x_1-y_1+2=0$，$x_2+2y_2-2\ln 2-6=0$，记 M＝$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$，则(　　　)

A．M 的最小值为$\dfrac{16}{5}$　　　　B．当 M 最小时，$x_2=\dfrac{14}{5}$

C．M 的最小值为$\dfrac{4}{5}$　　　　D．当 M 最小时，$x_2=\dfrac{12}{5}$

【答案】AB

【分析】看到所求式子的结构特征，立即联想“距离公式”，运用“形”知 M 的几何意义，为函数$y=\ln x-x+2$图象上的点到直线$x+2y-2\ln 2-6=0$上的点的距离的最小值的平方，再使用导数知识，转化为与直线$x+2y-2\ln 2-6=0$平行的切线间距离.

【解析】由$\ln x_1-x_1-y_1+2=0$，得$y_1=\ln x_1-x_1+2$，

$M=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$的最小值可转化为函数$y=\ln x-x+2$图象上的点到直线$x+2y-2\ln 2-6=0$上的点的距离的最小值的平方，

由$y=\ln x-x+2$得$y'=\dfrac{1}{x}-1$，

因为与直线$x+2y-2\ln 2-6=0$平行的直线斜率为$-\dfrac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{x}-1=-\frac{1}{2}$，解得$x=2$，则切点坐标为$(2,ln2)$，

所以$(2,ln2)$到直线$x+2y-2\ln 2-6=0$上的距离

$$d=\frac{|2+2\ln 2-2\ln 2-6|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5},$$

即函数$y=lnx-x+2$上的点到直线$x+2y-2\ln 2-6=0$上的点的距离最小值为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

所以$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$的最小值为$\frac{16}{5}$，

又过$(2,ln2)$且与$x+2y-2\ln 2-6=0$垂直的直线为$y-ln2=2(x-2)$，即$2x-y-4+ln2=0$，

联立$\begin{cases}x+2y-2\ln 2-6=0\\2x-y+\ln 2-4=0\end{cases}$，解得$x=\frac{12}{5}$，

即当M最小时，$x=\frac{14}{5}$.

故选：AB.

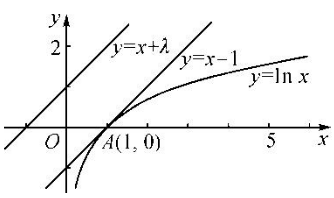
例 2　已知不等式$(m-n)^2+(m-l n n+\lambda)^2\geqslant 2$对任意$m\in\mathbf{R}$，$n\in(0,+\infty)$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围为________.

【答案】$[1,+\infty)$

【分析】由于条件“$(m-n)^2+(m-\ln n+\lambda)^2\geq 2$”中平方和的特征，可联想到两点$(m,m+\lambda)$，$(n,\ln n)$的距离公式，而点$(m,m+\lambda)$，$(n,\ln n)$分别是直线$y=x+\lambda$和曲线$f(x)=\ln x$上动点，故可转化为直线$y=x+\lambda$和曲线$f(x)=\ln x$上点之间的距离大于等于$\sqrt{2}$.

【解析】条件“不等式$(m-n)^2+(m-\ln n+\lambda)^2\geq 2$对任意$m\in\mathbf{R}$，$n\in(0,+\infty)$恒成立”可看作“直线$y=x+\lambda$以及曲线$f(x)=\ln x$上点之间的距离恒大于等于$\sqrt{2}$”.

如图，当与直线$y=x+\lambda$平行的直线与曲线$f(x)=\ln x$相切时，两平行线间的距离最短，$f'(x)=\frac{1}{x}=1$，故切点$A(1,0)$，此切点到直线$y=x+\lambda$的距离为$\frac{|1+\lambda|}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{2}$，解得$\lambda\geq 1$或$\lambda\leq -3$(舍去，此时直线与曲线相交).



例 3　已知对于一切 x，$y\in R$，不等式 $x^2+\frac{81}{x^2}-2xy+\frac{18}{x}\sqrt{2-y^2}-a\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

答案：$(-¥\ ,6]$

解析：$(x-y)^2+(\frac{9}{x}+\sqrt{2-y^2})^2\geq a+2$

左边的几何意义是动点 $(x,\frac{9}{x})$ 与动点 $(y,-\sqrt{2-y^2})$ 的距离平方.

例 4　(2020·衡水中学上学期期中)设 $D=\sqrt{(x-a)^2+(e^x-2\sqrt{a})^2}+a+2$，其中 $e\approx 2.71828\cdots$，则 D 的最小值是__________.

答案：$\sqrt{2}+1$

解析：$D=\sqrt{(x-a)^2+(e^x-2\sqrt{a})^2}+a+2$ 的几何意义是：曲线 $y=e^x$ 上点 $P\left(x,e^x\right)$ 与曲线 $y=2\sqrt{x}$ 上点 $Q\left(a,2\sqrt{a}\right)$ 的距离与 Q 点到 y 轴的距离和再加 2，而 Q 点到 y 轴的距离利用抛物线的定义，可转化为 Q 点到抛物线(第一象限部分)的焦点 $F(1,0)$的距离减去 1，故所求即为 F 到曲线 $y=e^x$ 上点距离的最小值再加 1，利用导数知识易求得.

【巩固训练】

1.已知 $a\in\mathbf{R}$，若实数 x、y 满足 $y=-x^2+3\ln x$，则 $\left(a-x\right)^2+\left(a+2-y\right)^2$ 的最小值为(　　)

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 18

2.已知 $a-\ln b=0$，$c-d=1$，则$(a-c)^2+(b-d)^2$的最小值是(　　)

A. 1　　B.$\sqrt{2}$

C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3.已知函数 $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{x}$，若直线 l_1，l_2 是函数 $y=f(x)$ 图象的两条平行的切线，则直线 l_1，l_2 之间的距离的最大值是_____.

4.设点 P 在函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}e^x$ 的图象上，点 Q 在函数 $g\left(x\right)=\ln\left(2x\right)$ 的图象上，则线段 PQ 长度的最小值为_________.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 $y=\frac{m}{x+1}$ $(m>0)$在 $x=1$ 处的切线为 l，那么点$(2，-1)$到直线 l 的距离的最大值为________.

6.若实数 a、b、c、d 满足 $\frac{a^2-2\ln a}{b}=\frac{3c-4}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为_____________.

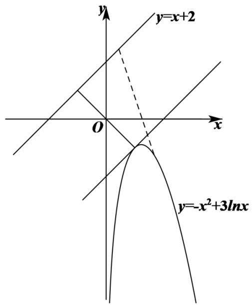
7. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x, x>1\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, x\le 1\end{cases}$，若 $m<n$，且 $f\left(m\right)=f\left(n\right)$，则 $n-m$ 的最小值是_____.

【答案或提示】

1.【答案】C

【解析】点(x,y)在曲线$y=-x^2+3\ln x$上，点$(a,a+2)$在曲线$y=x+2$上，

$(a-x)^2+(a+2-y)^2$的几何意义就是曲线$y=-x^2+3\ln x$上的点(x,y)到曲线$y=x+2$上点$(a,a+2)$的距离最小值的平方，如下图所示：



考查曲线$y=3\ln x-x^2\ (x>0)$平行于直线$y=x+2$的切线，

$\because y'=\dfrac{3}{x}-2x$，令$y'=\dfrac{3}{x}-2x=1$，解得$x=1$或$-\dfrac{3}{2}$(舍去)，

所以，切点为$(1,-1)$，该切点$(1,-1)$到直线$y=x+2$的距离$\dfrac{|1+1+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$就是所要求的曲线$y=-x^2+3\ln x$上的点与直线$y=x+2$上的点之间的最小距离，

故$(a-x)^2+(a+2-y)^2$的最小值为$\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$，故选：C.

2.【答案】C

【解析】设(b,a)是曲线C：$y=\ln x$上的点，(d,c)是直线l：$y=x+1$上的点，则$(a-c)^2+(b-d)^2$可看成曲线C上的点到直线l上的点的距离的平方．对函数$y=\ln x$求导得$y'=\dfrac{1}{x}$，令$y'=1$，得$x=1$，则$y=0$，所以曲线C上到直线$y=x+1$的距离最小的点为$(1,0)$，该点到直线$y=x+1$的距离为$\dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$.因此$(a-c)^2+(b-d)^2$的最小值为$(\sqrt{2})^2=2$.故选C.

3.【答案】2

4.【答案】$\sqrt{2}(1-\ln 2)$

【解析】由题，因为$f(x)=\dfrac{1}{2}e^x$与$g(x)=\ln(2x)$互为反函数，则图象关于$y=x$对称，

设点P为(x,y)，则到直线$y=x$的距离为$d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$，

设 $h(x)=\frac{1}{2}e^x-x$，则 $h'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$，令 $g¢(x)=0$，即 $x=\ln 2$，

所以当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(\ln 2)=1-\ln 2$，则 $d_{\min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$，

线段 PQ 长度的最小值为 $\sqrt{2}(1-\ln 2)$.

5.【答案】$\sqrt{2}$

6.【答案】$\frac{2(1-\ln 2)^2}{5}$

【分析】由平方结构特点产生了结构联想：类似两点间的距离公式，$A(a,b),B(c,d)$

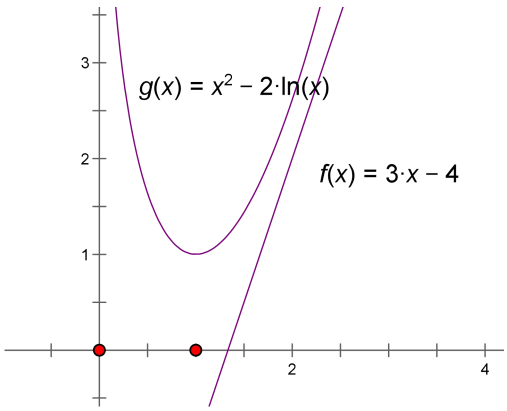
【解析】$\because \frac{a^2-2\ln a}{b}=\frac{3c-4}{d}=1$，　$\therefore b=a^2-2\ln a,d=3c-4$

$\therefore$ $A(a,b),B(c,d)$ 分别为两个函数 $y=x^2-2\ln x,y=3x-4$ 的图象上任意一点.

$b'=2a-\frac{2}{a}=\frac{2(a^2-1)}{a}=3,\because a>0,\therefore a=2$，所以 $A(2,4-2\ln 2)$，所以过 $A(2,4-2\ln 2)$ 点且斜率为 3 的切线方程为：$y-(4-2\ln 2)=3(x-2)$，

即 l_1 :3x-y-2-2ln2=0, l_2 :y=3x-4

两直线的距离即为 $A(a,b),B(c,d)$ 之距的最小值，即为 $\frac{2-2\ln 2}{\sqrt{10}}$，但是所求为距离的平方，所以结果为 $\frac{2(1-\ln 2)^2}{5}$.



点评：这种平方和结构从形的角度常想到两点的距离，从数的角度常想到基本不等式.

7.【答案】$3-2\ln 2$

【分析】根据几何意义，满足条件的点在曲线 $f(x)=\ln x(x>1)$ 上，该点处切线与 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 平行.

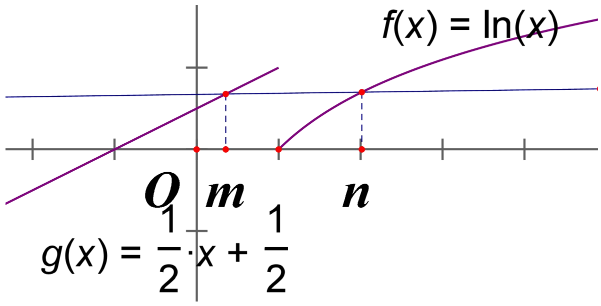
【解析】设 $(x_0,\ln x_0)(x_0>1)$ 为曲线 $f(x)=\ln x(x>1)$ 上一点，当该点处切线与 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 平行时，满足题意.

令 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}=\frac{1}{2}$ 得 $x_0=2>1$ 满足题意，即 $n=2$

把 $x_0=2$ 代入 $f(x)=\ln x$ 得 $y_0=\ln 2$

把 $y_0=\ln 2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 得 $x=2\ln 2-1$，即 $m=2\ln 2-1$

$\therefore n-m=2-(\ln 2-1)=3-\ln 2$ 即为所求.



专题 12　利用切线求解恒成立

【方法点拨】

1. 利用“形”解决恒成立问题(两个均为曲线)，可考虑两曲线在公切点处的取值情况；

2. 零点问题有时也可以转化为

【典型题示例】

例 1　(2021 • 江苏南京市期初)若不等式 $(ax^2+bx+1)e^x\le 1$ 对一切 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，其中 a，$b\in\mathrm{R}$，e 为自然对数的底数，则 $a+b$ 的取值范围是________.

【答案】$(-\infty，-1]$

【分析】思路一：直接转化为为最值问题；

思路二：利用“形”， 不等式 $(ax^2+bx+1)e^x\le 1$ 对一切 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，即 $ax^2+bx+1\le e^{-x}$，设 $f(x)=ax^2+bx+1$，$g(x)=e^{-x}$，因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$，故只需 $f(x)=ax^2+bx+1$ 开口朝下，且在点 $(0,1)$ 与 $g(x)=e^{-x}$ 有相同的公切线即可.

【解析一】令 $f(x)=(ax^2+bx+1)e^x$， $f(x)\le f(0)$ 恒成立，显然 $a\leqslant 0$，

$f'(x)=e^x[ax^2+(2a+b)x+b+1]$，则 $f'(0)=b+1=0\Rightarrow b=-1$，

$f'(x)=e^x[ax^2+(2a+1)x]=xe^x(ax+2a-1)$，

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在$(-\infty$，$0)$递增，$(0$，$+\infty)$递减，$f(x)\le f(0)$ 符合题意，

$a<0$ 时，$f(x)$ 在$(-\infty$，$\dfrac{1-2a}{a})$递减，$(\dfrac{1-2a}{a}$，$0)$递增，$(0$，$+\infty)$递减

$x<\dfrac{1-2a}{a}$，$ax^2-x+1<0\Rightarrow f(x)<0$，故 $f(x)\le f(0)$ 符合题意，

综上，$a\leqslant 0$，$b=-1$，因此 $a+b\in(-\infty$，$-1]$.

【解析二】不等式 $(ax^2+bx+1)e^x\le 1$ 可化为 $ax^2+bx+1\le e^{-x}$，

令 $f(x)=ax^2+bx+1$，$g(x)=e^{-x}$

当 $a=0$ 时，因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$，故只需直线 $f(x)=ax^2+bx+1$ 为 $g(x)=e^{-x}$ 在点 $(0,1)$ 处 $g(x)=e^{-x}$ 的切线即可，易得 $b=-1$，此时 $a+b=-1$.

当 $a\ne 0$ 时，因为 $f(x)$ 恒过点 $(0,1)$，为使 $ax^2+bx+1\le e^{-x}$ 对一切 $x\in R$ 恒成立，只需 $f(x)=ax^2+bx+1$ 开口朝下，且在点 $(0,1)$ 与 $g(x)=e^{-x}$ 有相同的公切线即可，

故 $\begin{cases}a<0\\ f'(0)=b=-1\end{cases}$，此时 $a+b\le -1$.

综上，$a+b$ 的取值范围是 $a+b\le -1$.

例 2 已知 e 为自然对数的底数，函数 $f(x)=e^x-ax^2$ 的图像恒在直线 $y=\dfrac{3}{2}ax$ 上方，则实数 a 的取值范围为_______.

【答案】$(-\dfrac{2}{e},0]$

【解析】依题意，有：$e^x-ax^2>\dfrac{3}{2}ax$，即 $e^x>ax^2+\dfrac{3}{2}ax$ 恒成立，

$a=0$ 时显然成立，

$a>0$ 时，右边为开口向上的抛物线，不可能恒成立，

所以，要使不等式恒成立，需 $a\leqslant 0$.

当 $a<0$ 时，设 $f(x)=ax^2+\dfrac{3}{2}ax$，$g(x)=e^x$

易知两函数的凸凹性相反，故只需考虑两函数图象有且仅有一个公共点，即有公切线的"临界状态"时的切点坐标.

设公切点为$\left(x_0,e^{x_0}\right)$，则$\begin{cases} e^{x_0}=a{x_0}^2+\dfrac{3}{2}ax_0 \\ e^{x_0}=2ax_0+\dfrac{3}{2}a \end{cases}$，解之得$x_0=-1$或$x_0=\dfrac{3}{2}$（舍）

∴切点为$\left(-1,e^{-1}\right)$

为使$f(x)<g(x)$， 只需$f(-1)=-\dfrac{1}{2}a<e^{-1}$，故$a>-\dfrac{2}{e}$

又$a<0$，所以$-\dfrac{2}{e}<a<0$.

综上，实数a的取值范围为$(-\dfrac{2}{e},0]$.

【巩固训练】

1. 设函数$f(x)=ax^2-a-\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$，若不等式$f(x)\geqslant 1-a$ 恒成立，则实数a 的取值范围为_______.

2.(2019·天津理·8)已知$a\in\mathbf{R}$，设函数$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+2a, & x\le 1, \\ x-a\ln x, & x>1. \end{cases}$若关于$x$的不等式$f(x)\ge 0$在$\mathbf{R}$上恒成立，则$a$的取值范围为

A. $[0,1]$ B. $[0,2]$ C. $[0,e]$ D. $[1,e]$

3. 设函数$f(x)=\ln x-ax^2+ax$，a为正实数，若函数$f(x)$有且只有1个零点，则a的值为_______.

4. 若曲线C_1：$y=x^2$与曲线C_2：$y=\dfrac{e^x}{a}(a>0)$存在公共切线，则实数a 的取值范围为_______.

【答案或提示】

1.【答案】$\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$

2.【答案】 C

3.【答案】1

【解析】 遇含参问题能分离变量则分离．函数 $f(x)$ 有且只有1个零点，意即 $g(x)=\ln x$ 与 $h(x)=ax^2-ax$ 的图象只有一个交点，由于 $g(x)=\ln x$ 与 $h(x)=ax^2-ax$ 均过点 $(1,0)$，所以 $f(x)$ 的零点为 $x=1$．

所以 $g(x)=\ln x$ 与 $h(x)=ax^2-ax$ 在点 $(1,0)$ 处相切，

故 $h'(1)=\left(2ax-a\right)_{x=1}=a$ 与 $g'(1)=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=1$ 相等，所以 $a=1$．

4.【答案】$\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

专题 13　两边夹

【方法点拨】

1．重要不等式：

(1)对数形式：$x\geqslant 1+\ln x(x>0)$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立．

(2)指数形式：$e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立．进一步可得到一组不等式链：$e^x>x+1>x>1+\ln x(x>0$，且 $x\neq 1)$．

2．树立一个转化的意识，即“等”与“不等”间的互化．

【典型题示例】

例 1　若实数 a,b 满足 $2\ln a+\ln\left(2b\right)\geq\frac{a^2}{2}+4b-2$，则(　　)

A．$a+b=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$　　　　B．$a-2b=\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

C．$a^2+b>3$　　　　D．$a^2-4b<1$

【答案】A

【分析】思路一：据果变形，直接使用重要不等式 $x-1\geq\ln x(x>0)$，两边夹逼将不等式转化为等式.

思路二：一边一个变量，构造两个函数，分别求出其最值，夹逼将不等式转化为等式.

【解析一】$\because 2\ln a+\ln\left(2b\right)=\ln a^2+\ln\left(2b\right)=\ln\frac{a^2}{2}+\ln\left(4b\right)$

$\therefore\ln\frac{a^2}{2}+\ln\left(4b\right)\geq\frac{a^2}{2}+4b-2$

易知 $x-1\geq\ln x(x>0)$，当且仅当 x=1 时，“=”成立

$\therefore\frac{a^2}{2}-1\geq\ln\frac{a^2}{2}$，$4b-1\geq\ln\left(4b\right)$ 当且仅当 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，“=”成立

根据不等式性质有 $\frac{a^2}{2}+4b-2\geq\ln\frac{a^2}{2}+\ln\left(4b\right)$

所以 $\ln\frac{a^2}{2}+\ln\left(4b\right)=\frac{a^2}{2}+4b-2$

此时必有 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{1}{4}$(下略).

【解析二】$\because 2\ln a+\ln\left(2b\right)\geq\frac{a^2}{2}+4b-2$

$\therefore 2\ln a-\frac{a^2}{2}+\geq 4b-\ln\left(2b\right)-2$

令 $f(a)=2\ln a-\dfrac{a^2}{2}$， $g(b)=4b-\ln(2b)-2$

利用导数知识易求得 $f(a)_{\max}=f(\sqrt{2})=\ln 2-1$， $g(b)_{\min}=g(b)=\ln 2-1$

所以 $f(a)\le g(b)$， 即 $2\ln a+\ln(2b)\le\dfrac{a^2}{2}+4b-2$

故 $2\ln a+\ln(2b)=\dfrac{a^2}{2}+4b-2$， 此时 $a=\sqrt{2}$， $b=\dfrac{1}{4}$(下略).

例 2 （2020·赣榆中学第二学期期初模拟检测·14）已知 a,b,c,d 都是正数， $e(\ln c+\ln d)\ge cd$， $4e^{\sqrt{a+b}-2}\le(a+b)$，则 $\sqrt{ab}+\dfrac{cd}{c+d}$ 的最大值是_______ .

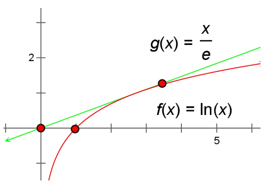
【答案】 $2+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

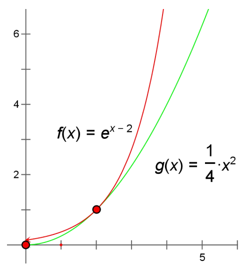
【分析】由 $e(\ln c+\ln d)\ge cd\Leftrightarrow\ln(cd)\ge\dfrac{cd}{e}$， 换元令 $cd=t(t>0)$， 则 $\ln t\ge\dfrac{t}{e}$， 考虑“形”， $\ln t\le\dfrac{t}{e}$ 恒成立，夹逼得 $cd=e$， 同理处置 $4e^{\sqrt{a+b}-2}\le(a+b)$， 最后使用基本不等式求解.

【解析】 $e(\ln c+\ln d)\ge cd\Leftrightarrow\ln(cd)\ge\dfrac{cd}{e}$， 令 $cd=t(t>0)$， 则 $\ln t\ge\dfrac{t}{e}$

事实上 $\ln t\le\dfrac{t}{e}$(当且仅当 $t=e$ 时, “=”成立)， 故 $cd=e$；

$4e^{\sqrt{a+b}-2}\le(a+b)\Leftrightarrow e^{\sqrt{a+b}-2}\le\dfrac{a+b}{4}$， 令 $\sqrt{a+b}=u(u>0)$， 则 $e^{u-2}\le\dfrac{u^2}{4}$





事实上 $e^{u-2}\ge\dfrac{u^2}{4}$(当且仅当 $u=2$ 时, “=”成立)， 故 $\sqrt{a+b}=2$；

所以 $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}=2$， $\dfrac{cd}{c+d}\le\dfrac{cd}{2\sqrt{cd}}=\dfrac{\sqrt{cd}}{2}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$(当且仅当 $a=b$， $c=d$ 时, “=”成立)

故 $\sqrt{ab}+\dfrac{cd}{c+d}$ 的最大值是 $2+\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

【巩固训练】

1. 已知正实数x, y满足$\frac{x}{2}+2y-2=\ln x+\ln y$，则$x^{y}=$______ .

2.(2019·江苏苏州·最后一卷)已知实数 a，b，c 满足$e^{a+c}+e^{2b-c-1}\leq a+2b+1$(e 为自然对数的底数)，则$a^2+b^2$的最小值是_________.

3. 若对于任意正实数x, y，不等式$4ax\leq e^{x+y-2}+e^{x-y-2}+2$恒成立，则实数$a$的最大值是______ .

4． 已知实数 a，b 满足 $2\ln a-e^{2b}\geq a^2-2b-2$(e 为自然对数的底数)，则 $a+2b=$_________.

【答案或提示】

1. 【答案】 $\sqrt{2}$

2.【答案】 $\frac{1}{5}$

【分析】将已知变形为$e^{a+c}+e^{2b-c-1}\le[(a+c)+1]+[(2b-c-1)+1]$，联系重要不等式$e^x\ge x+1$，夹逼得$a+c=0,2b-c+1=0$.

【解析】$\because$ $e^x\ge x+1$ $\quad\therefore$ $e^{a+c}\ge a+c$， $e^{2b-c+1}\ge 2b-c+1$

所以 $e^{a+c}+e^{2b-c+1}\ge(a+c)+(2b-c+1)=a+2b+1$

又$\because$ $e^{a+c}+e^{2b-c+1}\le a+2b+1$ $\quad\therefore$ $e^{a+c}+e^{2b-c+1}=a+2b+1$

当且仅当 $a+c=0,2b-c+1=0$ 时成立

$\therefore$ $a^2+b^2=(-c)^2+\left(\frac{c-1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}c^2-\frac{c}{2}+\frac{1}{4}$，所以$\left[a^2+b^2\right]_{\min}=\frac{1}{5}$.

3. 【答案】 $\frac{1}{2}$

4. 【答案】1

专题 14　利用函数同构解题

【方法点拨】

1. 一个方程中出现两个变量，适当变形后，使得两边结构相同；或不等式两边式子也可适当变形，使其两边结构相同，然后构造函数，利用函数的单调性把方程或不等式化简.

2.为了实现不等式两边“结构”相同的目的，需时时对指对式进行“改头换面”，常用的方法有：$x=e^{\ln x}$、$xe^x=e^{\ln x+x}$、$x^2e^x=e^{2\ln x+x}$、$\frac{e^x}{x}=e^{-\ln x+x}$、$\ln x+\ln a=\ln ax$、$\ln x-1=\ln\frac{x}{e}$，有时也需要对两边同时加、乘某式等.

3. 常见同构式：

$x\ln x$ 与 xe^x 型：$x\ln x=\ln xe^{\ln x}$，$xe^x=e^{\ln x}e^x$；$x+\ln x$ 与 $x+e^x$ 型：$x+\ln x=\ln x+e^{\ln x}$，$x+e^x=e^{\ln x}+e^x$.

【典型题示例】

例 1　(2020·新课标卷 II 文数·12)若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则(　　)

A．$\ln(y-x+1)>0$　B．$\ln(y-x+1)<0$　C．$\ln|x-y|>0$　D．$\ln|x-y|<0$

【答案】A

【分析】将已知 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$ 按照“左右形式形式相当，一边一个变量”的目的变形，然后逆用函数的单调性.

【解析】由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$ 移项变形为 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$

设 $f(x)=2^x-3^{-x}$

易知 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，故由 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，可得 $x<y$，所以 $y-x>0\Rightarrow y-x+1>1$，从而 $\ln(y-x+1)>0$，故选 A．

例 2　(2020·山东·21)已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，若 $f(x)\ge 1$，求 a 的取值范围.

【解析】将 $f(x)\ge 1$ 按照左右结构相同、变量移至一边的原则进行变形：

由 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a\ge 1$ 移项得：$ae^{x-1}+\ln a\ge\Leftrightarrow\ln x+1$

即 $e^{\ln a+x-1}+\ln a\ge\ln x+1$，两边同时加($x-1$)得 $e^{\ln a+x-1}+x+\ln a-1\ge\ln x+x$

即 $e^{\ln a+x-1}+\left(x+\ln a-1\right)\ge\ln x+e^{\ln x}$

设 $g(x)=x+e^x$，则 $g'(x)=1+e^x>0$，所以 $g(x)$ 单增

所以 $\ln a+x-1\ge\ln x$，即 $x-\ln x+\ln a-1\ge 0$

设 $h(x)=x-\ln x+\ln a-1$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 单增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=\ln a-1\ge 0$，所以 $a\ge 1$.

点评：对原不等式同解变形，如移项、通分、取对数、系数升指数等，把不等式转化为左右两边是相同结构的式子的结构，根据“相同结构”构造辅助函数．

例 3　已知函数 $f(x)=3^{x}-3^{-x}$，$f(1-2\log_3 t)+f(3\log_3 t-1)\geq\log_{\frac{1}{3}}t$，则 t 的取值范围是_______.

【答案】$[1,+\infty)$

【分析】这里 可以发现 $\log_{\frac{1}{3}}^{t}=-\log_3^{t}=(2\log_3^{t}-1)-(3\log_3^{t}-1)$，将 $f(1-2\log_3 t)+f(3\log_3 t-1)\geq\log_{\frac{1}{3}}t$ 移项变形为 $f(3\log_3 t-1)+(3\log_3^{t}-1)\geq(2\log_3^{t}+1)-f(1-2\log_3 t)$，易知 $f(x)=3^{x}-3^{-x}$ 是奇函数，$-f(1-2\log_3 t)=f(2\log_3^{t}+1)$，故进一步变形为 $f(3\log_3 t-1)+(3\log_3 t-1)\geq f(2\log_3 t-1)+(2\log_3 t-1)$，此时，得到一个"左右形式相当，一边一个变量"的不等式，令 $F(x)=f(x)+x$，问题转化为 $F(3\log_3^{t}-1)\geq F(2\log_3^{t}-1)$，只需研究 $F(x)=f(x)+x$ 的单调性，逆用该函数的单调性即可.

【解析】$\because\ \log_{\frac{1}{3}}^{t}=-\log_3^{t}=-(1-2\log_3^{t})-(3\log_3^{t}-1)$

$\therefore\ f(1-2\log_3 t)+f(3\log_3 t-1)\geq\log_{\frac{1}{3}}t$ 可变形为：

$f(3\log_3 t-1)+(3\log_3^{t}-1)\geq(2\log_3^{t}-1)-f(1-2\log_3 t)$

$\because\ f(x)=3^{x}-3^{-x}$ 是奇函数

$\therefore\ -f(1-2\log_3 t)=f(2\log_3^{t}-1)$

$\therefore\ f(3\log_3 t-1)+(3\log_3 t-1)\geq f(2\log_3 t-1)+(2\log_3 t-1)$

令 $F(x)=f(x)+x=3^{x}-3^{-x}+x$，则 $F'(x)=\ln3\cdot3^{x}+\ln3\cdot3^{-x}+1>0$

$\therefore\ F(x)$ 单增

$\therefore\ 3\log_3^{t}-1\geq2\log_3^{t}-1$，即 $\log_3^{t}\geq0$，解之得 $t\geq1$

所以 t 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

例 4　已知实数 x_1，x_2 满足 $x_1e^{x_1}=e^{3}$，$x_2\left(\ln x_2-2\right)=e^{5}$，则 $x_1x_2=$_____.

【分析】由已知条件考虑将两个等式转化为统一结构形式，令 $\ln x_2-2=t,x_2=e^{t+2}$，得到 $te^{t}=e^{3}$，研究函数 $f(x)=xe^{x}$ 的单调性，求出 x_1,t 关系，即可求解.

解法一：实数 x_1，x_2 满足 $x_1e^{x_1}=e^{3}$，$x_2\left(\ln x_2-2\right)=e^{5}$，

$x_1>0,x_2>e^{2}$，$\ln x_2-2=t>0,x_2=e^{t+2}$，则 $te^{t}=e^{3}$，

$f(x)=xe^{x}(x>0),f'(x)=(x+1)e^{x}>0(x>0)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，而 $f(x_1)=f(t)=e^3$，

$\therefore x_1=t=\ln x_2-2, \therefore x_1x_2=x_2(\ln x_2-2)=e^5$.

解析二：对 $x_1e^{x_1}=e^3$ 两边取自然对数得：$\ln x_1+x_1=3$，

对 $x_2(\ln x_2-2)=e^5$ 两边取自然对数得：$\ln x_2+\ln(\ln x_2-2)=5$　　(※)

为使两式结构相同，将(※)进一步变形为：$(\ln x_2-2)+\ln(\ln x_2-2)=3$

设 $f(x)=\ln x+x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)=3$ 的解只有一个.

$\therefore x_1=\ln x_2-2$，　$\therefore x_1x_2=(\ln x_2-2)x_2=e^5$

点评:两种解法实质相同，其关键是对已知等式进行变形，使其“结构相同”，然后构造函数，利用函数的单调性，利用是同一方程求解.

【巩固训练】

1.如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\cos^3\theta-\sin^3\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，则 θ 的取值范围是__________.

2.不等式 $\dfrac{8}{(x+1)^3}+\dfrac{10}{x+1}-x^3-5x>0$ 的解集是__________.

3.已知 $\theta\in[0,2\pi)$，若关于 k 的不等式 $\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上恒成立，则 θ 的取值范围为________ .

4.已知实数 a，$b\in(0，2)$，且满足 $a^2-b^2-4=\dfrac{4}{2^b}-2^a-4b$，则 $a+b$ 的值为_____ .

5. (2020·新课标Ⅰ理数·12)若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则(　　)

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

6.设方程 $x+2^x=4$ 的根为 m，设方程 $x+\log_2{}^x=4$ 的根为 n，则 $m+n=$__________.

7.已知 $a^3-3a^2+5a=1$，$b^3-3b^2+5b=5$，那么 $a+b$ 的值是__________.

8.不等式 $x^6-(x+2)^3+x^2\le x^4-(x+2)^2+x+2$ 的解集是________.

9. 若 x_1 满足方程 $2x+2^x=5$，x_2 满足方程 $2x+\log_2{}^{(x-1)}=5$，则 $x_1+x_2=$__________.

【答案或提示】

1.【答案】$(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

2.【解析】原不等式可化为：$\left(\frac{2}{x+1}\right)^3+5\cdot\frac{2}{x+1}>x^3+5x$

构造函数 $f(x)=x^3+5x$，则 $f'(x)=3x^2+5>0$，$f(x)$ 在 R 上单增

所以 $\frac{2}{x+1}>x$，解之得 $x<-2或-1<x<1$

所以原不等式解集是 $\{x|x<-2或-1<x<1\}$.

3.【答案】$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

【分析】本题的实质是含参数 θ（这里当然是 sin θ 、cos θ ）的不等式恒成立问题，应抓住已知条件 $\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)$ 的对称结构，构造函数，利用函数的单调性布列不等式.

【解析】看到 $\sqrt{\sin\theta}-\sqrt{\cos\theta}\le k\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)$ 想“对称结构”，将它变形为：

$k\sin^3\theta-\sqrt{\sin\theta}\ge k\cos^3\theta-\sqrt{\cos\theta}$，

设 $f(x)=kx^3-\sqrt{x}$，$f'(x)=3kx^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

易知当 $k\in(-\infty,-2]$ 时，$f'(x)=3kx^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单减，

所以 $\begin{cases}\sin\theta\le\cos\theta\\ \sin\theta\ge 0\\ \cos\theta\ge 0\end{cases}$，解之得：$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

所以 θ 的取值范围 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

4.【答案】2

【分析】将 $a^2-b^2-4=\frac{4}{2^b}-2^a-4b$ 化为：$a^2+2^a=(2-b)^2+2^{2-b}$，设 $f(x)=x^2+2^x$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，

由 $f(a)=f(2-b)$，得 $a+b$ 的值.

【解析】由 $a^2-b^2-4=\frac{4}{2^b}-2^a-4b$，化简为：$a^2+2^a=2^{2-b}+(b-2)^2$，即 $a^2+2^a=(2-b)^2+2^{2-b}$，

设 $f(x)=x^2+2^x$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，因为 a，b∈(0，2)，所以 2-b∈(0，2)，

且 $f\left(a\right)=f\left(2-b\right)$，所以 $a=2-b$，即 $a+b=2$.

5.【答案】B

【分析】$\because 4^{b}+2\log_{4}b=2^{2b}+\log_{4}b^{2}=2^{2b}+\log_{2}b=2^{2b}+\log_{2}2b-1$

$\therefore 2^{a}+\log_{2}a==2^{2b}+\log_{2}2b-1$

设 $f(x)=2^{x}+\log_{2}x$，利用作差法结合 $f(x)$ 的单调性即可得到答案.

【解析】$\because 4^{b}+2\log_{4}b=2^{2b}+\log_{4}b^{2}=2^{2b}+\log_{2}b=2^{2b}+\log_{2}2b-1$

$\therefore 2^{a}+\log_{2}a=2^{2b}+\log_{2}2b-1$，故 $2^{a}+\log_{2}a<2^{2b}+\log_{2}2b$

设 $f(x)=2^{x}+\log_{2}x$，则 $f(x)$ 为增函数，

所以 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$.

$f(a)-f(b^{2})=2^{a}+\log_{2}a-(2^{b^{2}}+\log_{2}b^{2})=2^{2b}+\log_{2}b-(2^{b^{2}}+\log_{2}b^{2})=2^{2b}-2^{b^{2}}-\log_{2}b$，

当 $b=1$ 时，$f(a)-f(b^{2})=2>0$，此时 $f(a)>f(b^{2})$，有 $a>b^{2}$

当 $b=2$ 时，$f(a)-f(b^{2})=-1<0$，此时 $f(a)<f(b^{2})$，有 $a<b^{2}$，所以 C、D 错误.

故选 B.

点评:本题需构造函数，其基本策略是：“左右形式相当，一边一个变量，取左或取右，构造函数妥当”，我们称之为“同构函数”，然后再利用函数的单调性求值.

6.【答案】4

7.【解析】由题意知 $a^{3}-3a^{2}+5a-3=-2$，$b^{3}-3b^{2}+5b-3=2$，

设 $f(x)=x^{3}-3x^{2}+5x-3$，则 $f(a)=-2$，$f(b)=2$.

因为 $f(x)$图象的对称中心为(1,0)，所以 $a+b=2$.

点评：本题的难点在于发现函数的对称性，对于三次函数 $f(x)y=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ 其对称中心为$(x_{0}$，$f(x_{0}))$，其中 $f''(x_{0})=0$.

8.【分析】直接解显然是不对路的.观察不等式的特征，发现其含有$(x+2)$、x 两个因式，将不等式转化为“一边一个变量”的形式为：$x^{6}-x^{4}+x^{2}\leq(x+2)^{3}-(x+2)^{2}+(x+2)$，构造函数 $f(x)=x^{3}-x^{2}+x$，题目转化为求解 $f(x^{2})\leq f(x+2)$ 的问题. 因为 $f'(x)=3x^{2}-2x+1$，易知 $f'(x)=3x^{2}-2x+1>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 为 R 上的单调增函数，所以由 $f(x^{2})\leq f(x+2)$ 立得：$x^{2}\leq x+2$，解之得 $-1\leq x\leq 2$.

9.【答案】$\dfrac{7}{2}$

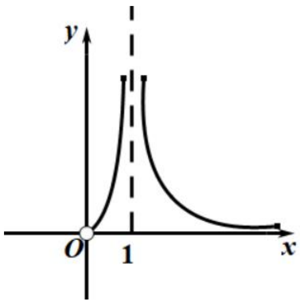
专题 15　根据函数的性质选择函数图象

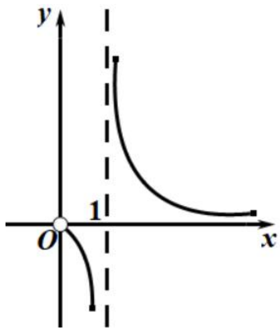
【方法点拨】

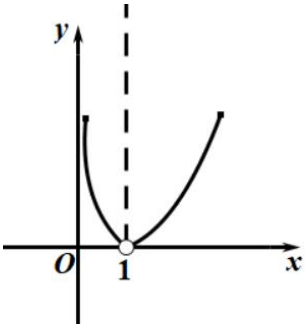
1. 已知函数解析式选择对应的图象，一般应考察函数的相关性质，如定义域、奇偶性、对称性、渐近线、函数值的符号、特殊值等，运用排除法解题.
2. 具体实际问题选择对应的图象问题，也应转化为发现函数的相关性质，运用排除法解题.

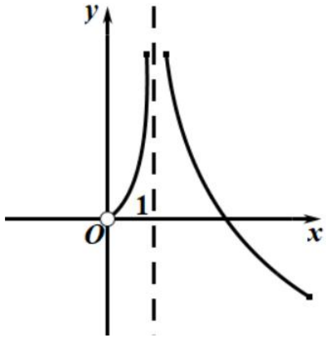
【典型题示例】

例 1　(2021·江苏启东期初) 已知函数 $f(x)=\dfrac{-2}{\ln(x+1)-x}$,则函数 $y=f(x-1)$ 的图象大致为(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

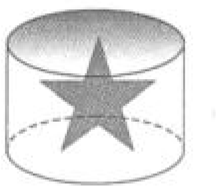
【答案】A

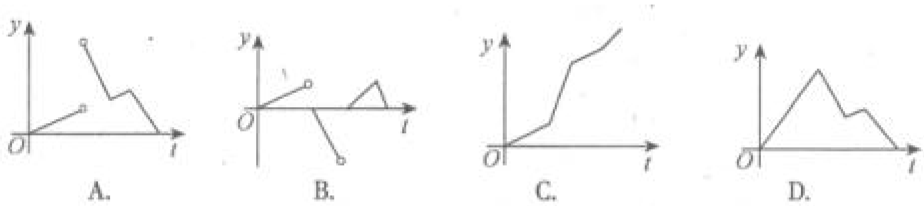
【分析】充分运用图象提供的信息，如对称性、单调性、渐近线、函数值的符号等，运用排除法逐一排除，最终选择出正确答案.

【解析】首先考虑函数的渐近性，当 $x\to+\infty$ 时，$\ln(x+1)-x\to-\infty$，此时 $f(x)\to0^+$，排除 C、D，对于答案再考虑当 A、B 而言，区别在于当 $0<x<1$ 时的函数值得符号不同，不妨用特殊值法排除，如取 $x=1-\dfrac{1}{e}$，则 $y=f(x-1)=\dfrac{-2}{\ln\dfrac{1}{e}-1+\dfrac{1}{e}}>0$，排除 B，故选 A.

点评：已知函数解析式选择匹配的图象，一般不要考虑运用导数等知识去直接作图，而应当恰当运用图象提供的性质，采用排除法来解题，这种题型一般难度不大，而应当考虑“速决秒杀”.

例 2　如图，一个正五角星薄片(其对称轴与水面垂直)匀速地升出水面，记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)(S(0)=0)$，则导函数 $y=S'(t)$ 的图像大致为

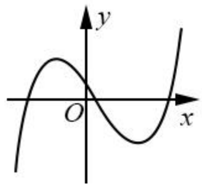




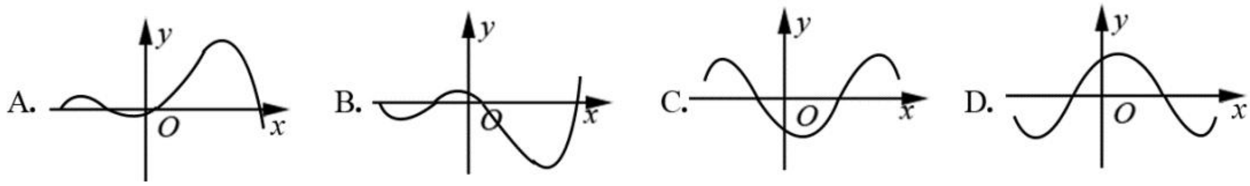
【答案】A

【解析】本题考查函数图像、导数图、导数的实际意义等知识，重点考查的是对数学的探究能力和应用能力.最初零时刻和最后终点时刻没有变化，导数取零，排除 C；总面积一直保持增加，没有负的改变量，排除 B；考察 A、D 的差异在于两肩位置的改变是否平滑，考虑到导数的意义，判断此时面积改变为突变，产生中断，选择 A.

例 3 函数 $y=f(x)$的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$的图象可能是



A B C D

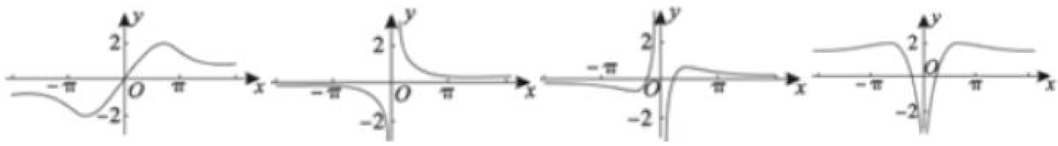


【答案】D

【解析】原函数先减再增，再减再增，且 $x=0$ 位于增区间内，因此选 D.

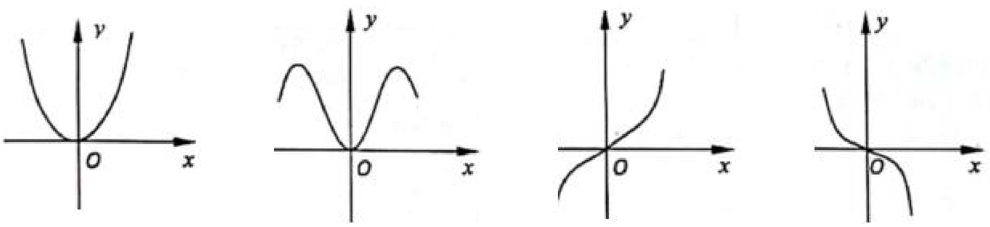
【巩固训练】

1.（2021·江苏扬州中学期初）函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|+x^2}{x^3+\sin x}$ 的图像大致为



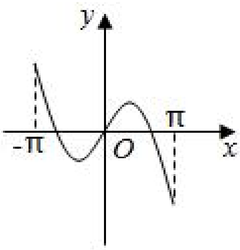
A B C D

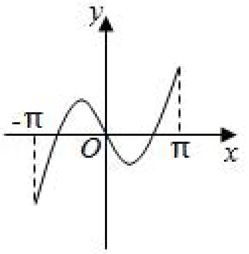
2.(2021·江苏南京六校联合体期初)函数 $f(x)=\dfrac{x(2^{x}+2^{-x})}{2+\cos x}$ 的部分图像大致为

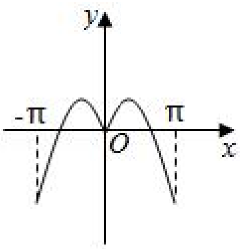


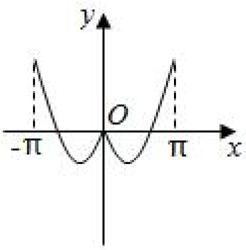
A　　　　　B　　　　　C　　　　　D

3.(2020·浙江·4)函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi，\pi]$ 上的图象可能是(　　)

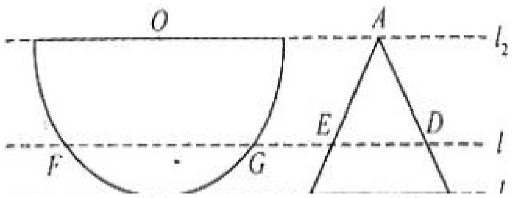
A. 

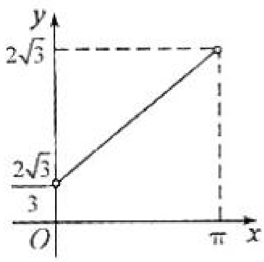
B. 

C. 

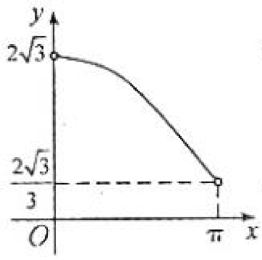
D. 

4.如图，半径为 1 的半圆 O 与等边三角形 ABC 夹在两平行线，l_1,l_2 之间 $l//l_1$，l 与半圆相交于 F,G 两点，与三角形 ABC 两边相交于 E，D 两点，设弧 $\overset{\frown}{FG}$ 的长为 $x(0<x<\pi)$，$y=EB+BC+CD$，若 l 从 l_1 平行移动到 l_2，则函数 $y=f(x)$ 的图像大致是

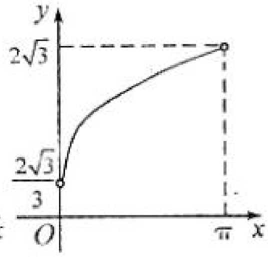




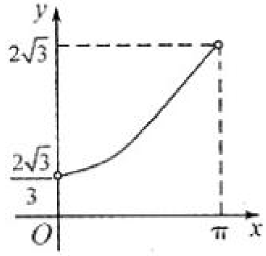
A.



B.

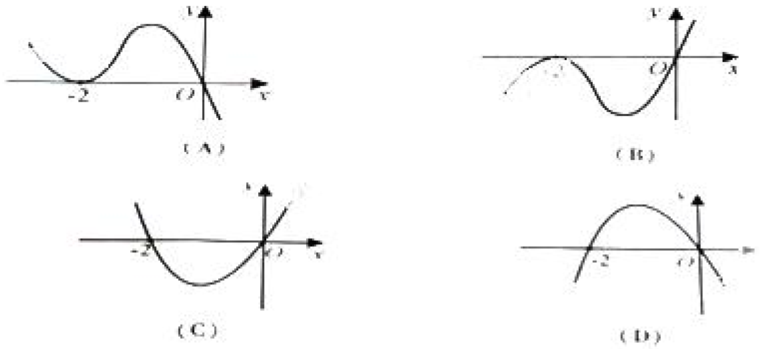


C.

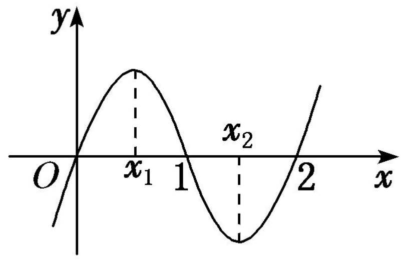


D.

5. 设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数 $f'(x)$，且函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，则函数 $y=xf'(x)$ 的图象可能是



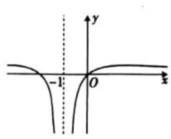
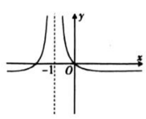
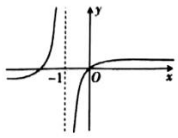
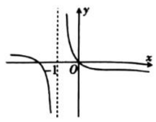
6.已知函数$f(x)=x^3+bx^2+cx$的大致图象如图所示，则$x_1^2+x_2^2$等于(　　)



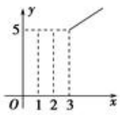
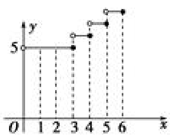
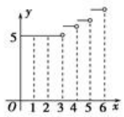
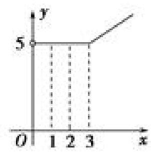
A.$\frac{2}{3}$　　　　B.$\frac{4}{3}$

C.$\frac{8}{3}$　　　　D.$\frac{16}{3}$

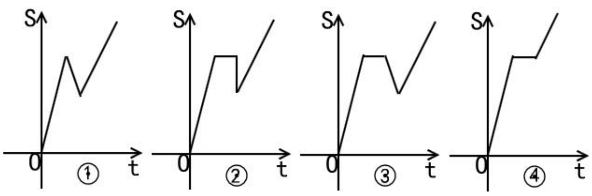
7. 函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left|x+1\right|}{\left|x+1\right|}$的部分图象大致是(　　)

A．　B．　C．　D．

8. 某市出租车起步价为5元(起步价内行驶里程为3 km)，以后每1 km价为1.8元(不足1 km按1 km计价)，则乘坐出租车的费用y(元)与行驶的里程x(km)之间的函数图像大致为(　　)

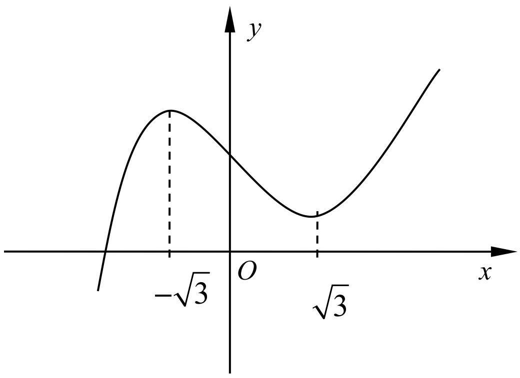
A．　B．　C．　D．

9.某人开车去某地旅行，先沿直线匀速前进了a km，到达目的地后游玩了一段时间，又原路返回匀速行驶了6 km$\left(b<a\right)$，再折回匀速前进c km，则此人距起点的距离s与时间t的关系示意图正确的是______(填序号).



10. 如图为函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的大致图象，$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数，则不等式$xf'(x)<0$的解集是

____________.



y
O
x
$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$

【答案或提示】

1.【答案】C

2.【答案】C

【解析】首先可判断出原函数是奇函数，其次 $x>0$ 时，$f(x)>0$，故选 C.

3.【答案】A

【分析】先判断函数的奇偶性，再判断函数值的特点.

【解析】：$y=f(x)=x\cos x+\sin x$，

则 $f(-x)=-x\cos x-\sin x=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 为奇函数，函数图象关于原点对称，故排除 B，D，

当 $x=\pi$ 时，$y=f(\pi)=\pi\cos\pi+\sin\pi=-\pi<0$，故排除 B，

故选：A.

4.【答案】D

5.【答案】C

【解析】由函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值可知 $x<-2$，$f'(x)<0$，则 $xf'(x)>0$；$x>-2$，$f'(x)>0$ 则 $-2<x<0$ 时 $xf'(x)<0$，$x>0$ 时 $xf'(x)>0$.

6.【答案】C

【解析】由图象可知 $f(x)$ 的图象过点 $(1,0)$ 与 $(2,0)$，x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的极值点，因此 $1+b+c=0,8+4b+2c=0$，解得 $b=-3$，$c=2$，所以 $f(x)=x^3-3x^2+2x$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+2$，则 x_1，x_2 是方程 $f'(x)=3x^2-6x+2=0$ 的两个不同的实数根，因此 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\frac{2}{3}$，所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

7.【答案】A

8.【答案】B

9.【答案】③

10.【答案】$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$

专题 16　导数中构造函数问题

【方法点拨】

1. 双主元不等式恒成立、存在性问题：变量分离，构造函数，最终将问题转化为函数最值问题.

2.关于“x_1、x_2”的齐次分式型--------换元法

减元构造：多变量不等式 ，一般处理策略为消元或是把一个看作变量其他看作常量；当都不能处理的时候，通过变形，再换元产生一个新变量，从而构造新变量的函数.

【典型题示例】

例 1　(2021·江苏扬州中学高三数学开学考试·8)已知函数 $f\left(x\right)=x-a\sin x$，对任意的 x_1，$x_2\in\left(-\infty,+\infty\right)$，且 $x_1\neq x_2$，不等式 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$a<\dfrac{1}{2}$　　B．$a\le\dfrac{1}{2}$　　C．$a>\dfrac{1}{2}$　　D．$a\ge\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】因为 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1>x_2$，则 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>a$ 可化为 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>a(x_1-x_2)$，即

$f\left(x_1\right)-ax_1>f\left(x_2\right)-ax_2$

设 $F(x)=f\left(x\right)-ax$

则 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>a$ 恒成立，即 $f\left(x_1\right)-ax_1>f\left(x_2\right)-ax_2$ 对任意的 x_1，$x_2\in\left(-\infty,+\infty\right)$ 且 $x_1>x_2$ 时恒成立，即

$F(x_1)>F(x_2)$ 对任意的 x_1，$x_2\in\left(-\infty,+\infty\right)$ 且 $x_1>x_2$ 时恒成立

所以 $F(x)=f\left(x\right)-ax$ 在 R 上单增

故 $F'\left(x\right)=\left(x-a\sin x-ax\right)'=1-a\cos x-a\ge 0$ 在 R 上恒成立

所以 $a\le\dfrac{1}{1+\cos x}$，故 $a\le\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right)_{\min}=\dfrac{1}{2}$

所以实数 a 的取值范围是 $a\le\dfrac{1}{2}$，　选 B．

点评:

从解题中不难发现，不等式 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f'\left(x\right)\ge a$ 恒成立.

例 2　(2021·江苏徐州铜山、南通如皋一抽测·22 改编)已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-3x$，对于任意 $x_1,x_2\in[1,10]$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)-f(x_2)>\dfrac{m\left(x_1-x_2\right)}{x_1x_2}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

【解析】不等式 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>\dfrac{m\left(x_2-x_1\right)}{x_1x_2}$ 可变形为 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>\dfrac{m}{x_1}-\dfrac{m}{x_2}$，

即 $f\left(x_1\right)-\dfrac{m}{x_1}>f\left(x_2\right)-\dfrac{m}{x_2}$ 当 $x_1,x_2\in[1,10]$，且 $x_1<x_2$ 恒成立，

所以函数 $y=f(x)-\dfrac{m}{x}$ 在 $[1,10]$ 上单调递减.

令 $h(x)=f(x)-\dfrac{m}{x}=\ln x+x^2-3x-\dfrac{m}{x},x\in[1,10]$

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3+\dfrac{m}{x^2}\leq 0$ 在 $x\in[1,10]$ 上恒成立，

即 $m\quad -2x^3+3x^2-x$ 在 $x\in[1,10]$ 上恒成立.

设 $F(x)=-2x^3+3x^2-x$，则 $F'(x)=-6x^2+6x-1=-6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$.

因为当 $x\in[1,10]$ 时，$F'(x)<0$，

所以函数 $F(x)$ 在 $[1,10]$ 上单调递减，所以 $F(x)_{\min}=F(10)=-2\times10^3+3\times10^2-10=-1710$，

所以 $m\quad -1710$，

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1710]$.

例 3　(2021·江苏省泰州中学九月测　·12)(多选题)已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$，若 $0<x_1<x_2$，则下列结论正确的是(　　).

A．$x_2f\left(x_1\right)<x_1f\left(x_2\right)$　　　　B．$x_1+f\left(x_1\right)<x_2+f\left(x_2\right)$

C．$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$　　　　D．当 $\ln x>-1$ 时，$x_1f\left(x_1\right)+x_2f\left(x_2\right)>2x_2f\left(x_1\right)$

【答案】AD

【解析】A．正确；因为令 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\ln x$，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，

∴当 $0<x_1<x_2$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$，∴ $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$ 即 $x_2f(x_1)<x_1f(x_2)$.

B．错误；因为令 $g(x)=f(x)+x=x\ln x+x$，∴ $g'(x)=\ln x+2$，

∴ $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(0,e^{-2})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

∴ $x_1+f(x_1)$ 与 $x_2+f(x_2)$ 无法比较大小.

C．错误；因为令 $g(x)=f(x)-x=x\ln x-x$，$g'(x)=\ln x$，

∴ $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

∴当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$g(x_1)>g(x_2)$，

∴ $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$，∴ $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$，∴ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

当 $1<x_1<x_2$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$ ∴ $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$，

∴ $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$，∴ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

D．正确；因为 $\ln x>-1$ 时，$f(x)$ 单调递增，又∵A 正确，

∴ $x_1\cdot f(x_1)+x_2\cdot f(x_2)-2x_2f(x_1)>x_1[f(x_1)-f(x_2)]+x_2[f(x_2)-f(x_1)]$

$=(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$.

故选 AD.

【巩固训练】

1.已知函数 $f(x)=x-a\sin x$，对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$a<\frac{1}{2}$　　B．$a\leq\frac{1}{2}$　　C．$a>\frac{1}{2}$　　D．$a\geq\frac{1}{2}$

2.若对 $\forall x_1,x_2\in(0,1]$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 4\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|$，则实数 a 的取值范围为____________.

3. 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x},(m\in R)$，若对任意 $b>a>0,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ 恒成立，则实数 m 的范围为

_______________.

4.已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x(a<0)$，若对 $\forall x_1,x_2\in(0,1]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le 4\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$，则实数 a 的取值范围为____________.

5.若 $f(x)=|\ln x|+\dfrac{a}{x+1}$，且对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,2\right]$，$x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<-1$，求 a 的取值范围.

6.已知函数 $f(x)=\ln x$，若 $x_1>x_2>0$，求证：$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>\dfrac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}$.

7.已知函数 $h(x)=\ln x+1(a\in\mathbf{R})$，对任意的 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，证明：$\dfrac{x_1-x_2}{h(x_1)-h(x_2)}>\sqrt{x_1x_2}$ 恒成立.

【答案或提示】

1.【答案】B

【解析】$\because \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>a$ 且 $f(x)=x-a\sin x$，

$\therefore \dfrac{x_1-a\sin x_1-(x_2-a\sin x_2)}{x_1-x_2}-a=\dfrac{x_1-ax_1-a\sin x_1-(x_2-ax_2-a\sin x_2)}{x_1-x_2}>0$，

设 $g(x)=x-ax-a\sin x$，

则 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$，又对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$ 都成立，

所以 $g(x)$ 在 R 上为增函数，即 $g'(x)=1-a-a\cos x\geq 0$ 恒成立，

整理得 $(1+\cos x)a\leq 1$，当 $1+\cos x=0$ 时，不等式成立，

当 $1+\cos x>0$ 时，$a\leq\dfrac{1}{1+\cos x}$ 恒成立，

又 $\dfrac{1}{1+\cos x}\geq\dfrac{1}{2}$，所以 $a\leq\dfrac{1}{2}$.故选：B.

2.【答案】$[-3,0)$

【解析】不妨设 $x_1>x_2$，为"去绝对值"，研究函数的单调性.

$\because f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}>0$ $\quad\therefore f(x)$ 在 $(0,1]$ 上增

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq 4\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)\leq 4(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})\Leftrightarrow f(x_1)+\frac{4}{x_1}\leq f(x_2)+\frac{4}{x_2}$$

令 $F(x)=f(x)+\dfrac{4}{x}=x-1-a\ln x+\dfrac{4}{x}(a<0)$

问题转化为 $F(x)$ 减在 $(0,1]$ 上恒成立.

$\therefore F'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{4}{x^2}\leq 0$ 在 $(0,1]$ 上恒成立

故 $a\geq x-\dfrac{4}{x}$，即 $a\geq(x-\dfrac{4}{x})_{\min}=-3$

所以实数 a 的取值范围为 $[-3,0)$.

点评:

本类题目解题的切入点是抓住式子的结构特征进行变形，而关键是适时"构造函数"，其构造的时机是"左右形式相当，一边一个变量，取左或取右，构造函数妥当".

3.【答案】$[\frac{1}{4},+\infty)$

4.【答案】$[-3,0)$

5.【答案】$a \geq \frac{27}{2}$

【解析】$\because$ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<-1$，$\therefore$ $\frac{f(x_1)+x_1-[f(x_2)+x_2]}{x_1-x_2}<0$

由题意得 $F(x)=g(x)+x$ 在区间 $(0,2]$ 上是减函数.

$1°$ 当 $1 \leq x \leq 2, F(x)=\ln x+\frac{a}{x+1}+x$，　$\therefore$ $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{(x+1)^2}+1$

由 $F'(x) \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{(x+1)^2}{x}+(x+1)^2=x^2+3x+\frac{1}{x}+3$ 在 $x \in [1,2]$ 恒成立.

设 $m(x)=x^2+3x+\frac{1}{x}+3$，　$x \in [1,2]$，则 $m'(x)=2x-\frac{1}{x^2}+3>0$

$\therefore$ $m(x)$ 在 $[1,2]$ 上为增函数，$\therefore$ $a \geq m(2)=\frac{27}{2}$.

$2°$ 当 $0<x<1, F(x)=-\ln x+\frac{a}{x+1}+x$，$\therefore$ $F'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{a}{(x+1)^2}+1$

由 $F'(x) \leq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{(x+1)^2}{x}+(x+1)^2=x^2+x-\frac{1}{x}-1$ 在 $x \in (0,1)$ 恒成立

设 $t(x)=x^2+x-\frac{1}{x}-1$，　$x \in (0,1)$ 为增函数，$\therefore$ $a \geq t(1)=0$

综上：a的取值范围为 $a \geq \frac{27}{2}$.

6.【证明】当 $x_1>x_2>0$ 时，不等式 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}$ 等价于 $\ln(\frac{x_1}{x_2})>\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{(\frac{x_1}{x_2})^2+1}$

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $t>1$，设 $\mu(t)=\ln t-\frac{2t-2}{t^2+1}(t>1)$，则 $u'(t)=\frac{(t^2-1)(t^2+2t-1)}{t(t^2+1)^2}$，　当 $t \in (1,+\infty)$ 时，$u'(t)>0$，

$u(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \mu(t)>\mu(1)=0$，

所以，原不等式成立.

7.【证明】$\frac{x_1-x_2}{h(x_1)-h(x_2)}>\sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}$

$\because$ x_1，$x_2 \in (0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$　　$\therefore$ $\ln x_1>\ln x_2$，即 $\ln x_1-\ln x_2>0$

$$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}>\ln x_1-\ln x_2\Leftrightarrow\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}}>\ln\frac{x_1}{x_2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}>\ln\frac{x_1}{x_2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\ln\frac{x_1}{x_2}>0$$

令 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=t(t>1)$ $\qquad\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\ln\frac{x_1}{x_2}>0\Leftrightarrow t-\frac{1}{t}-\ln t>0(t>1)$

令 $f(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t(t>1)$，只需 $f(t)_{\min}>0$.

$\because f'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ $\qquad\therefore f(t)$ 当 $t>1$ 时增

$\therefore f(t)>f(1)=0$

故对任意的 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1>x_2$， $\frac{x_1-x_2}{h(x_1)-h(x_2)}>\sqrt{x_1x_2}$ 恒成立.

点评:

本类题目的特征是，问题中出现了含有“x_1、x_2”的齐次分式，其解法是：通过换元，设 $t=\frac{x_1}{x_2}$，转化为关于新元在指定区间上的恒成立问题.

专题 17　逆用导数的四则运算法则构造函数

【方法点拨】

1.已知中同时出现关于 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 的不等关系，而所求是抽象形式的不等式，应考虑“逆用导数的四则运算法则”构造函数的单调性，然后再逆用单调性；

2. 常见的构造函数:

①对于 $xf'(x)+f(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=xf'(x)$；一般的，对于 $xf'(x)+nf(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=x^n f(x)$.

②对于 $xf'(x)-f(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$；一般的，对于 $xf'(x)-nf(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}$.

③对于 $f'(x)-f(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$；一般的，对于 $f'(x)-nf(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^{nx}}$.

④对于 $f'(x)+f(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=e^x f(x)$；一般的，对于 $f'(x)+nf(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=e^{nx}f(x)$.

⑤对于 $f'(x)>f(x)\tan x(或f'(x)<f(x)\tan x)$，即 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0(<0)$，构造 $h(x)=f(x)\cos x$.

⑥对于 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0(<0)$，构造 $h(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$.

⑦对于 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}>0$，构造 $h(x)=\ln f(x)$.

⑧对于 $f'(x)+\ln af(x)>0(<0)$，构造 $h(x)=a^x f(x)$.

⑨对于 $f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}>0(<0)$，构造 $h(x)=f(x)\ln x$.

【典型题示例】

例 1　(2021·江苏省南通市通州区一诊·15)已知偶函数 $f(x)$ ($x\neq0$)的导函数为 $f'(x)$， $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$， 当 $x>0$ 时，$xf'(x)-2f(x)>0$， 则使 $f(x-1)>\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1)^2$ 成立的 x 的取值范围是_______．(其中 e 为自然对数的底数)

【答案】 $(-\infty,1-e)\cup(1+e,+\infty)$

【解析】设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{f'(x)x-2f(x)}{x^3}$

$\because x>0$ 时， $xf'(x)-2f(x)>0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时， $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在(0，＋∞)单增

又 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，所以 $F(e)=\dfrac{1}{e}$

$\because$ $f(x)$ 是偶函数　　$\therefore$ $F(x)$ 也是偶函数，且 $F(x)$ 在(－∞，0)单减

$f(x-1)>\frac{1}{\mathrm{e}}(x-1)^2$ 等价于 $\frac{f(x-1)}{(x-1)^2}>\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $F(x-1)>F(e)$

由 $F(x)$ 是偶函数且 $F(x)$ 在(0，$+\infty$)单增

得 $|x-1|>e$，解之得 $x>e+1$ 或 $x<1-e$．

例 2　(多选题)已知定义在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(0)=0$，$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则下列判断中正确的是(　　)

A．$f(\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{4})$　　B．$f(ln\frac{\pi}{3})>0$

C．$f(\frac{\pi}{6})>2f(\frac{\pi}{3})$　　D．$f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$

【分析】结合已知可构造 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$x\in[0,\frac{1}{2}\pi)$，结合已知可判断 $g(x)$ 的单调性，结合单调性及不等式的性质即可判断．

【解答】解：令 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$x\in[0,\frac{1}{2}\pi)$，

因为 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，

则 $g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{cos^2x}<0$，

故 $g(x)$ 在 $[0$，$\frac{1}{2}\pi)$ 上单调递减，

因为 $f(0)=0$，则 $f(x)\quad 0$，

结合选项可知，$g(\frac{\pi}{6})>g(\frac{\pi}{4})$，从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}>\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，即 $f(\frac{\pi}{6})>\frac{\sqrt{6}}{2}f(\frac{\pi}{4})$，故 A 错误，

因为 $ln\frac{1}{3}\pi>0$，结合 $g(x)$ 在在 $[0$，$\frac{1}{2}\pi)$ 上单调递减可知 $g(ln\frac{1}{3}\pi)<0$，从而有 $\frac{f(ln\frac{1}{3}\pi)}{\cos ln\frac{1}{3}\pi}<0$，

由 $\cos ln\frac{1}{3}\pi>0$ 可得 $f(ln\frac{1}{3}\pi)<0$，故 B 错误；

$g(\frac{\pi}{6})>g(\frac{1}{3}\pi)$，从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}>\frac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$，且 $f(\frac{1}{3}\pi)<0$，即 $f(\frac{\pi}{6})>\sqrt{3}f(\frac{1}{3}\pi)>2f(\frac{1}{3}\pi)$．故 C 正确；

$g(\frac{\pi}{4})>g(\frac{1}{3}\pi)$，从而有 $\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}>\frac{f(\frac{1}{3}\pi)}{\frac{1}{2}}$ 即 $f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{1}{3}\pi)$．故 D 正确．

故选：CD．

例 3　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则 $f(x)>2x+4$ 的解集为____________.

【答案】$(-1,+\infty)$

【分析】题目应归结为"解抽象函数型不等式"问题，解决方法是"逆用函数的单调性".题目中哪个条件能让你联想到"函数的单调性"呢？注意到已知中 $f'(x)>2$，只需构造函数 $g(x)$，使得 $g'(x)=f'(x)-2$，不难得到 $g(x)=f(x)-2x+c$（这里 c 为常数，本题中取 $c=0$），进而利用 $g(x)$ 的单调性，即可找到解题的突破口.

【解析】构造函数 $g(x)=f(x)-2x$，则 $g'(x)=f'(x)-2>0$，故 $g(x)$ 单调递增，且 $g(-1)=f(-1)-2\times(-1)=4$. 另一方面所求不等式 $f(x)>2x+4$，就转化为 $g(x)=f(x)-x>g(-1)$，逆用单调性定义易知 $x>1$，则不等式的解集为 $(-1,+\infty)$.

例 4　设 $f(x)$是定义在 R 上的可导函数，且满足 $f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $f(\sqrt{x+1})>\sqrt{x-1}\cdot f(\sqrt{x^2-1})$的解集为______.

【答案】　$[1,2)$

【解析】设 $F(x)=xf(x)$，则由 $F'(x)=f(x)+xf'(x)>0$，可得函数 $F(x)$是 R 上的增函数.

又$\sqrt{x+1}>0$，∴由 $f(\sqrt{x+1})>\sqrt{x-1}f(\sqrt{x^2-1})$可变形得 $\sqrt{x+1}f(\sqrt{x+1})>\sqrt{x^2-1}f(\sqrt{x^2-1})$，即 $F(\sqrt{x+1})>F(\sqrt{x^2-1})$，∴

$\begin{cases}\sqrt{x+1}>\sqrt{x^2-1},\\ x\geqslant 1,\end{cases}$　解得 $1\leqslant x<2$.

【巩固训练】

1.函数 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，$f(0)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f'(x)>1$，则不等式 $e^x\cdot f(x)>e^x+1$ 的解集为_____.

2.已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，设其导函数为 $f'(x)$，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，恒有 $xf'(x)<f(-x)$，则满足 $\frac{1}{3}(2x-1)f(2x-1)<f(3)$ 的实数 x 的取值范围是_____.

3.设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<-xf'(x)$，则不等式 $f(x+1)>(x-1)f(x^2-1)$ 的解集是(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

4．定义在 R 上的可导函数 $f(x)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$(x-1)f'(x)-f(x)>0$ 恒成立，$a=f(2),b=\frac{1}{2}f(3),c=(\sqrt{2}+1)f(\sqrt{2})$，则 a,b,c 的大小关系为(　　)

A．$c<a<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$c<b<a$

5．定义在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$，$f'(x)$是它的导函数，且恒有 $f'(x)>f(x)\cdot\tan x$ 成立．则(　　)

A．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$　　B．$\sqrt{3}\cdot f(\frac{\pi}{6})>2\cos 1\cdot f(1)$

C．$\sqrt{6}f(\frac{\pi}{6})>2f(\frac{\pi}{4})$　　　　D．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})>f(\frac{\pi}{3})$

6．函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对任意的 $x\in R$，都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，则(　　)

A. $3f(\ln 2)>2f(\ln 3)$　　　　B. $3f(\ln 2)<2f(\ln 3)$

C. $3f(\ln 2)=2f(\ln 3)$　　　　D. $3f(\ln 2)$ 与 $2f(\ln 3)$ 的大小不确定

7. 设奇函数 $f(x)$定义在$(-\pi, 0)\cup(0, \pi)$上其导函数为 $f'(x)$，且 $f(\frac{\pi}{2})=0$，当 $0<x<\pi$时，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$，则关于 x的不等式 $f(x)<2f(\frac{\pi}{6})\sin x$ 的解集为___________．

【答案或提示】

1.【答案】 $(0,\ +\infty)$

【解析】构造函数 $g(x)=e^x\cdot f(x)-e^x$,

因为 $g'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)]-e^x>e^x-e^x=0$,

所以 $g(x)=e^x\cdot f(x)-e^x$ 为 **R** 上的增函数．又因为 $g(0)=e^0\cdot f(0)-e^0=1$，所以原不等式转化为 $g(x)>g(0)$，解得 $x>0$.

2.【答案】$(-1,2)$

3.【答案】D

【解析】构造函数 $[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)<0$，于是该函数递减，$f(x+1)>(x-1)f(x^2-1)$ 变形为 $(x+1)f(x+1)>(x^2-1)f(x^2-1)$，于是 $\begin{cases}x+1>0\\x^2-1>0\\x+1<x^2-1\end{cases}$，得 $x>2$，选 D.

4 .【答案】A

【解析】构造函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}>0$，即函数 $g(x)$ 单调递增，

则 $a=f(2)=\dfrac{f(2)}{2-1}=g(2)$，$b=\dfrac{1}{2}f(3)=\dfrac{f(3)}{3-1}=g(3)$，

$c=(\sqrt{2}+1)f(\sqrt{2})=\dfrac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}=g(\sqrt{2})$

则 $g(\sqrt{2})<g(2)<g(3)$，即 $c<a<b$，选 A .

5 .【答案】A

【解析】由 $f'(x)>f(x)\tan x$ 得 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0$，

构造函数 $F(x)=f(x)\cos x$，则 $F'(x)>0$，故 $F(x)$ 单调递增，

有 $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}<f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. 故选 A .

6 .【答案】B

【解析】令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)(e^x)'}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，因为 $f'(x)>f(x)\Rightarrow f'(x)-f(x)>0$，所以在 R 上 $h'(x)>0$ 恒成立.即函数 $h(x)$ 在 R 单调递增.

因为 $\ln 3>\ln 2$，

所以 $h(\ln 3)>h(\ln 2)$

即 $\frac{f(\ln 3)}{e^{\ln 3}} > \frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}} \Rightarrow \frac{f(\ln 3)}{3} > \frac{f(\ln 2)}{2} \Rightarrow 2f(\ln 3) > 3f(\ln 2)$.答案选 B .

7.【答案】$(-\frac{\pi}{6}, 0)\cup(\frac{\pi}{6}, \pi)$

【分析】这是一道难度较大的填空题，它主要考查奇函数的单调性在解不等式中的应用，奇函数的图象关于坐标原点中心对称，关于原点对称的区间上具有相同的单调性；在公共定义域上两个奇函数的积与商是偶函数，偶函数的图象关于 y 轴轴对称，关于原点对称的区间上具有相反的单调性，导数是研究函数单调性的重要工具，大家知道 $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$，$(\sin x)' = \cos x$，于是本题的本质是构造 $\frac{f(x)}{\sin x}$ 来解不等式

【解析】设 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，则 $g'(x)=(\frac{f(x)}{\sin x})' = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x}$，

所以当 $0 < x < \pi$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减

又由于在 $(0, \pi)$ 上 $\sin x > 0$，考虑到 $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，所以不等式 $f(x) < 2f(\frac{\pi}{6})\sin x$ 等价于 $\frac{f(x)}{\sin x} < \frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin\frac{\pi}{6}}$，即 $g(x)< g(\frac{\pi}{6})$,所以此时不等式等价于 $\frac{\pi}{6} < x < \pi$.

又因为 $f(x)$ 、$\sin x$ 为奇函数，所以 $g(x)$ 是偶函数，且在 $(-\pi, 0)$ 上 $\sin x < 0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 是单调递增函数，原不等式等价于 $g(x) > g(-\frac{\pi}{6})=\frac{f(-\frac{\pi}{6})}{\sin(-\frac{\pi}{6})}$，所以此时不等式等价于 $-\frac{\pi}{6} < x < 0$，

综上，原不等式的解集是 $(-\frac{\pi}{6}, 0)\cup(\frac{\pi}{6}, \pi)$.

专题 18　对数单身狗、指数找朋友

【方法点拨】

对数单身狗、指数找朋友:

①在证明或处理含对数函数的不等式时，通常要将对数型的函数“独立分离”出来，这样再对新函数求导时，就不含对数了，只需一次就可以求出它的极值点，从而避免了多次求导.这种相当于让对数函数“孤军奋战”的变形过程，我们形象的称之为“对数单身狗”.

由 $f(x)\ln x+g(x)>0\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$ (这里设 $f(x)>0$)，则 $\left[\ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{1}{x}+\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]'$ 不含超越函数，求解过程简单.

②在证明或处理含指数函数的不等式时，通常要将指数型的函数“结合”起来，即让指数型的函数乘以或除以一个多项式函数，这样再对新函数求导时，只需一次就可以求出它的极值点，从而避免了多次求导.这种相当于让指数函数寻找“合作伙伴”的变形过程，我们形象的称之为“指数找朋友”.

由 $e^x+f(x)>0\Leftrightarrow 1+\dfrac{f(x)}{e^x}>0$，则 $\left[1+\dfrac{f(x)}{e^x}\right]'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ 是一个多项式函数，变形后可大大简化运算.

【典型题示例】

例 1　(2020·新课标Ⅰ·理科·21)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^3+1$，求 a 的取值范围.

【答案】$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

【分析】遇到 $f(x)\mathrm{e}^x+g(x)$的形式变形为 $\mathrm{e}^x\cdot h(x)$，其求导后的结果是$[\mathrm{e}^x\cdot h(x)]'=\mathrm{e}^x\cdot[h(x)+h'(x)]$，其导数方程是多项式形式，所以它的根与指数函数无关，有利于更快捷地解决问题.

【解析】$f(x)\geq \dfrac{1}{2}x^3+1$ 等价于 $(\dfrac{1}{2}x^3-ax^2+x+1)\mathrm{e}^{-x}\leq 1$.

设函数 $g(x)=(\dfrac{1}{2}x^3-ax^2+x+1)\mathrm{e}^{-x}(x\geq 0)$，则

$$g'(x)=-(\frac{1}{2}x^3-ax^2+x+1-\frac{3}{2}x^2+2ax-1)\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{2}x[x^2-(2a+3)x+4a+2]\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

(i)若$2a+1\leqslant 0$，即 $a\leq -\dfrac{1}{2}$，则当$x\in(0，2)$时，$g'(x)>0$.所以$g(x)$在$(0，2)$单调递增，而$g(0)=1$，故当$x\in(0，2)$时，$g(x)>1$，不合题意.

(ii)若$0<2a+1<2$，即 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$，则当$x\in(0，2a+1)\cup(2，+\infty)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(2a+1，2)$时，$g'(x)>0$.所以$g(x)$

在(0，2a+1)，(2，+∞)单调递减，在(2a+1，2)单调递增.由于g(0)=1，所以g(x)≤1当且仅当g(2)=(7−4a)e^{-2}≤1，

即a≥ $\frac{7-e^2}{4}$.

所以当$\frac{7-e^2}{4}\le a<\frac{1}{2}$时，$g$($x$)≤1.

(iii)若2a+1≥2，即$a\ge\frac{1}{2}$，则g(x)≤$(\frac{1}{2}x^3+x+1)e^{-x}$.

由于$0\in[\frac{7-e^2}{4},\frac{1}{2})$，故由(ii)可得$(\frac{1}{2}x^3+x+1)e^{-x}$≤1.

故当$a\ge\frac{1}{2}$时，g(x)≤1.

综上，a的取值范围是$[\frac{7-e^2}{4},+\infty)$.

点评：

解决形如 $f(x)e^x+g(x)$常见结论 $e^x\geqslant x+1$(有时甚至 $e^x\geqslant\frac{1}{2}x^2+x+1$)，从形的角度看，它揭示了曲线与其切线的位置关系，从数的角度看，它提供了一种将指数型结构转化为多项式型结构的方法，从而顺利突破难点.

例 2　若不等式$x\ln x\ge a(x-1)$对所有$x\ge1$都成立，求实数a的取值范围．

【解析】原问题等价于$\ln x-\frac{a(x-1)}{x}\ge0$对所有$x\ge1$都成立，

令$f(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x}$，$x\ge1$，则$f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$．

(1)当$a\le1$时，$f'(x)=\frac{x-a}{x^2}\ge0$恒成立，即$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，因而$f(x)\ge f(1)=0$恒成立；

(2)当$a>1$时，令$f'(x)=0$，则$x=a$，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{min}=f(a)=\ln a-a+1<0$，不合题意．

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,1]$．

点评:

上述解法优势在于，将 ln$x$ 的系数化“1”后，就可以有效避免求导后再出现对数函数，避免了隐性零点的出现,这是解决对数型函数的精华所在．

【巩固训练】

1.已知 e^x≥1＋ax 对任意 x∈[0,＋∞)成立，则实数 a 的取值范围是_______　　　.

2.已知函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$，当 x≥0 时,$f(x)$≥0 恒成立，则实数 a 的取值范围为_______ .

3.已知$e^x>x^2-2ax+1$对任意的$x>0$，则实数a的取值范围是___________.

4. 已知关于x的方程$x\ln x-a\left(x^2-1\right)=0$在$\left(0,+\infty\right)$上有且只有一个实数根，则实数$a$的取值范围是___________.

5. 已知$f(x)=e^x-\frac{1}{4}x^2+ax-a^2$的零点不少于两个，则实数$a$的取值范围是___________.

6. 已知 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是____________.

7.已知当 $x\geq 1$ 时，$x^{2}lnx-x+1\geq m(x-1)^{2}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________ .

【答案或提示】

1.【答案】 $(-\infty,1]$

【解析】根据常用不等式 $e^x\geqslant x+1$,且 $y=x+1$ 与 $y=e^x$相切于(0,1),又 $y=ax+1$ 也过点(0,1),观察图象可知,要使 $e^x\geqslant 1+ax$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$成立,则 $a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

2.【答案】 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【解析一】 由 $f'(x)=e^x-1-2ax$,又 $e^x\geqslant x+1$,所以 $f'(x)=e^x-1-2ax\geqslant x-2ax=(1-2a)x$,

所以当 $1-2a\geqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$时,$f'(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$,而 $f(0)=0$,于是当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 0$,满足题意；又 $x\neq 0$ 时,$e^x>x+1$,所以可得

$e^{-x}>1-x$,从而当 $a>\frac{1}{2}$时,$f'(x)=e^x-1-2ax\leqslant e^x-e^x\cdot e^{-x}+2a(e^{-x}-1)=(1-e^{-x})\cdot(e^x-2a)$,故当 $x\in(0,\ln 2a)$时,$f'(x)<0$,而

$f(0)=0$,于是当 $x\in(0,\ln 2a)$时,$f(x)<0$,不合题意．

综上所述,实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

【解析二】因为 $e^x\geqslant x+1$,所以当 $a\leqslant 0$ 时,$e^x\geqslant ax^2+x+1$ 恒成立,故只需讨论 $a>0$ 的情形．令 $F(x)=e^{-x}(1+x+ax^2)-1$,

问题等价于 $F(x)\leqslant 0$,由 $F'(x)=e^{-x}[-ax^2+(2a-1)x]=0$ 得 $x_1=0,x_2=\frac{2a-1}{a}$.

② 当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时,$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,所以 $F(x)\leqslant F(0)=0$ 恒成立;

②当 $a>\frac{1}{2}$时,因为 $F(x)$在$[0,x_2]$上单调递增,所以 $F(x_2)\geqslant F(0)=0$ 恒成立,此时 $F(x)\leqslant 0$ 不恒成立．综上所述,实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

3.【答案】 $\left(\frac{2-e}{2},+\infty\right)$

【提示】 $e^x>x^2-2ax+1\Leftrightarrow\frac{x^2-2ax+1}{e^x}-1<0$

设 $g(x)=\frac{x^2-2ax+1}{e^x}-1$，则 $g'(x)=\frac{-(x-1)(x-2a-1)}{e^x}$

分类讨论，将导函数的零点、定义域的端点比较，分 $2a+1\geq 0$、$0<2a+1<1$、$2a+1=1$、$2a+1>1$ 四种情况.

4.【答案】 $(-\infty,0]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

5.【答案】 $(-\infty,-1]$

【提示】 $e^x-\frac{1}{4}x^2+ax-a^2=0\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{x}{2}-a\right)^2}{e^x}-1=0$

6.【答案】$(0,+\infty)$

【提示】$(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^{2}}{(x-2)e^{x}}-\dfrac{1}{a}=0$

7.【答案】$(-\infty,\frac{3}{2}]$

【解析】原不等式等价于$\ln x-\frac{m(x-1)^2+(x-1)}{x^2}\geq 0$，

令$f(x)=\ln x-\frac{m(x-1)^2+(x-1)}{x^2}$，$x\geq 1$，则$f'(x)=\frac{(x-1)[x-(2m-2)]}{x^3}$,

令$f'(x)=0$，得$x_1=1$，$x_2=2m-2$.

(1)当 $2m-2\leq 1$ 时，即$m\leq\frac{3}{2}$时，对 $x\geq 1$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)\geq f(1)=0$，满足题意；

(2)当 $2m-2>1$ 时，即$m>\frac{3}{2}$时，对$x\in(1,2m-2)$，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1,2m-2)$上单调递减，所以$f(2m-2)<f(1)=0$，不合题意；

综上所述，实数m的取值范围是$(-\infty,\frac{3}{2}]$.

专题 19　一元二次不等式整数解的个数

【方法点拨】

不等式(一般是一元二次不等式)的整数解的个数问题，一般采用"分离函数"的方法转化为两函数图象间的位置关系较简单，分离函数的的一般策略是"一动一静，一直一曲，动直定曲".

【典型题示例】

例 1　若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中整数恰有 3 个，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$\left(\frac{25}{9},\frac{49}{16}\right]$

【解析一】原不等式转化为 $(a-4)x^2+4x-1>0$，

则 $a-4<0,\Delta=16+4(a-4)>0$，即 $0<a<4$

而 $(a-4)x^2+4x-1=0$ 的解为 $x_1=\frac{1}{2+\sqrt{a}},x_2=\frac{1}{2-\sqrt{a}}$，

由 $0<a<4$ 得：$x_1\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$，则 $x_2=\frac{1}{2-\sqrt{a}}\in(3,4]$，

解之得：$\frac{25}{9}<a\le\frac{49}{16}$.

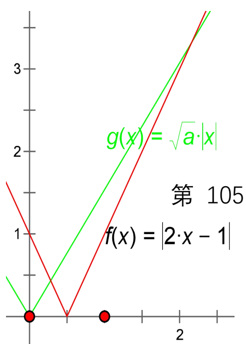
【解析二】易知 $a>0$，则原不等式可化为 $|2x-1|<\sqrt{a}|x|$，

令 $f(x)=|2x-1|$，$g(x)=\sqrt{a}|x|$

问题转化为两函数 $f(x)$、$g(x)$ 图象问题，当 $f(x)$ 的图象在 $g(x)$ 的图象的下方时的横坐标为整数点有且仅有三个，如下图

则 $\begin{cases}g(3)>f(3)\\g(4)\le f(4)\end{cases}$，$\begin{cases}3\sqrt{a}>5\\4\sqrt{a}\le 7\end{cases}$，解之得 $\frac{25}{9}<a\le\frac{49}{16}$

故实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{25}{9},\frac{49}{16}\right]$.



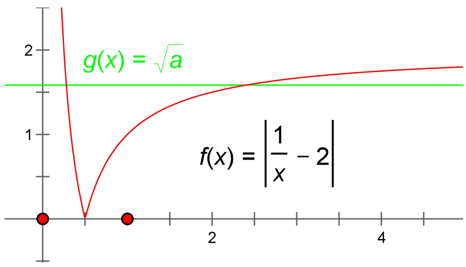
.

【解析三】仿解法二，易知$a>0$，则原不等式可化为$\left|\frac{1}{x}-2\right|<\sqrt{a}$，

令 $f(x)=\left|\frac{1}{x}-2\right|$，$g(x)=\sqrt{a}$，下同解法二利用图象

则$f(3)<\sqrt{a}\le f(4)$，即$\frac{5}{3}<\sqrt{a}\le\frac{7}{4}$，解之得$\frac{25}{9}<a\le\frac{49}{16}$

故实数a的取值范围是$\left(\frac{25}{9},\frac{49}{16}\right]$.



点评:

解法一是直接利用“数”解决，即将一元二次不等式解集中整数恰有 3 个问题，转化为对应的一元二次方程的解之间恰有三个整数，先将其中一个根的范围进行缩定，然后推测其另一个根的范围，利用之布列不等式求解.解法难度较大，不建议使用.

而解法二、三，其关键是利用“形”解决，即将一元二次不等式解集中整数恰有 3 个问题，转化为满足不等关系的函数图象间的横坐标恰有三个整数，从两种解法可以看出，解法三更简单，可谓实现“秒杀”，这对学生的转化能力提出更高的要求.该方法的重中之重在于“分离函数”的能力，一般遵循“一动一静，一直一曲，动直定曲”的原则进行.

例 2　已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}$，过点$(1,0)$作曲线$y=f(x)$的两条切线，切点分别为$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，其中$0<x_1<x_2$.若在区间(x_1,x_2)内存在唯一整数，则实数a的取值范围是_______.

【答案】$-\frac{4}{3}\le a<-1$

【分析】利用导数的几何意义，不难得出 x_1,x_2 是方程 $x^2+2ax-a=0$ 的两个根，分离函数 $x^2=-2a(x-\frac{1}{2})$，问题转化为两函数 $y=x^2$、$y=-2a(x-\frac{1}{2})$ 的交点横坐标间存在唯一整数，利用"形"，易知该整数为 1，故只需 $\begin{cases}-2a(1-\frac{1}{2})>1\\-2a(2-\frac{1}{2})\le 4\end{cases}$，解之得 $-\frac{4}{3}\le a<-1$.

【巩固训练】

1.若关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中至多包含 2 个整数，则实数的 a 取值范围是________.

A.(－3,5)；　B. (－3,2)；　C. [－3,5]；　D. [－2,4] .

2.(多选题)若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>0\\2x^2+(2k+5)x+5k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{-2\}$，则整数 k 的值可以是________.

A. －3；　B. 0；　C. 1；　D. 2 .

3.设 $0<b<1+a$,若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则 a 的取值范围是____________.

4.已知关于 $\boldsymbol{x}$ 的不等式组 $\boldsymbol{1\le kx^2+2x+k\le 2}$ 有唯一实数解，则实数 $\boldsymbol{k}$ 的取值是________.

5. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中的整数恰有 2 个，则实数 a 的取值范围是____________.

6.已知集合 $M=\{x|x^2+x-6>0\}$，$N=\{x|x^2-2ax+3\le 0,a>0\}$，若 $M\cap N$ 中恰有一个整数，则 a 的最小值是

▲ .

7.设集合 A=$\{x|x^2+2x-3>0\}$，集合 B=$\{x|x^2-2ax-1\le 0,a>0\}$.若 $A\cap B$ 中恰含有一个整数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$\left(0,\frac{3}{4}\right)$　B．$\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right)$　C．$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$　D．$(1,+\infty)$

【答案或提示】

1.【答案】C

2.【答案】ABC

3.【答案】$1 < a < 3$

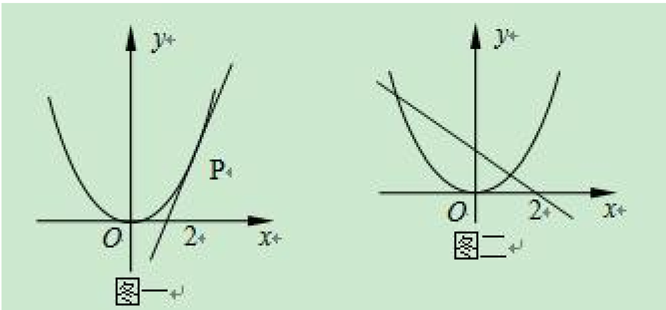
4.【答案】 $k = 1+\sqrt{2}$或$k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

5.【答案】$\left[-1,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{25}{3},9\right]$

【解析】分离变量，不等式 $x^2-ax+2a<0$ 可转化为 $x^2<a(x-2)$，构造函数 $f(x)=x^2$，$g(x)= a(x-2)$.

如图一，当 $a>0$，利用导数易求出切点 P(4,16)，欲使不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中恰有两个整数，其解集中必要整数 4，则另一解必为 3 或 5，比较过这两点的直线的斜率，可得$\frac{25}{3}<a\le 9$；如图二，当 $a<0$，欲使不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集中恰有两个整数，其解集中必要整数 0，则另一解必为 1 或-1，比较过这两点的直线的斜率，可得$-1\le a<-\frac{1}{3}$；

综上可得，实数 a 的取值范围是：$\frac{25}{3}<a\le 9$ 或 $-1\le a<-\frac{1}{3}$.



6.【答案】 2

7.【答案】B .

【解析】 $A=\{x\,|\,x^2+2x-3>0\}=\{x\,|\,x>1或x<-3\}$，因为函数 $y=f(x)=x^2-2ax-1$ 的对称轴为 $x=a>0$，$f(0)=-1<0$，根据对称性可知要使 $A\cap B$ 中恰含有一个整数，则这个整数解为 2，所以有 $f(2)\le 0, f(3)>0$ 且 $f(3)>0$，即$\begin{cases}4-4a-1\le 0\\9-6a-1>0\end{cases}$，$\therefore \frac{3}{4}\le a<\frac{4}{3}$，选 B.

专题 20　利用拆凑法求多元不等式的最值

【方法点拨】

1. 已知的一边是二次齐次可分解，另一边是常数，可考虑换元法；
2. 例 2、例 3 中使用了拆凑用以“凑形”，其目的在于一次使用基本不等式，能实现约分或倍数关系.

【典型题示例】

例 1　(2021·江苏省泰州中学九月测·16)若实数 x，y 满足 $2x^2+xy-y^2=1$，则 $\dfrac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】因为 $2x^2+xy-y^2=(2x-y)(x+y)$， $x-2y=(2x-y)-(x+y)$，

$5x^2-2xy+2y^2=(2x-y)^2+(x+y)^2$，设 $2x-y=u$， $x+y=v$，

故原问题可转化为“已知 $u\cdot v=1$，求 $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$ 的最大值”.

又因为 $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}=\dfrac{u-v}{(u-v)^2+2uv}=\dfrac{1}{(u-v)+\dfrac{2}{u-v}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{(u-v)\cdot\dfrac{2}{u-v}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\dfrac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $u-v=\sqrt{2}$ 时取等号.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

例 2　已知 $x,y,z\in R^+$，则 $\mu=\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值是________

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】本题变量个数较多且不易消元，考虑利用均值不等式进行化简，要求得最值则需要分子与分母能够将变量消掉，观察分子为 xy,yz 均含 y，故考虑将分母中的 y^2 拆分与 x^2,z^2 搭配，即

$\mu=\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{xy+yz}{\left(x^2+\dfrac{1}{2}y^2\right)+\left(\dfrac{1}{2}y^2+z^2\right)}$，而 $x^2+\dfrac{1}{2}y^2\ge 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{2}y^2}=\sqrt{2}xy, z^2+\dfrac{1}{2}y^2\ge 2\sqrt{z^2\cdot\dfrac{1}{2}y^2}=\sqrt{2}yz$，

所以 $\mu\le\dfrac{xy+yz}{\sqrt{2}xy+\sqrt{2}yz}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

点评：

本题在拆分 y^2 时还有一个细节，因为分子 xy, yz 的系数相同，所以要想分子分母消去变量，则分母中 xy, yz 也要相同，从而在拆分 y^2 的时候要平均地进行拆分(因为 x^2, z^2 系数也相同)．所以利用均值不等式消元要善于调整系数，使之达到消去变量的目的．

例 3　若实数 x，y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 x^2+y^2 的最小值是______．

【分析】

思路 1：注意到条件与所求均含有两个变量，从简化问题的角度来思考，消去一个变量，转化为只含有一个变量的函数，从而求它的最小值．本题中可直接由已知解得 y，代入所求消去 y；也可将直接使用“1”的代换，将所求转化为关于 x，y 的二次齐次分式.

思路 2：由所求的结论为 x^2+y^2，想到将条件应用基本不等式构造出 x^2+y^2，然后将 x^2+y^2 求解出来即可．

【解析一】从结论出发，注意到已知中不含“y^2”项，故拆“x^2”项的系数

设 $x^2+y^2=tx^2$　　$-t$　$x^2+y^2=tx^2$　　$-t$　$x^2+y^2]\geqslant tx^2$　　$\sqrt{1-t}$　$xy(0<t<1)$　　※

则 t:　$\sqrt{1-t}$　　，解之得：$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

代入※得：$x^2+y^2\geqslant\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(x^2$　　$xy)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2+y^2$ 的最小值是$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$．

【解析二】从已知出发，注意到结论中不含“xy”项，故拆“xy” 项的系数

设 $x^2+2xy=x^2+2(tx)(\frac{1}{t}$　$y)\leqslant x^2+[(tx)^2+(\frac{1}{t}$　$y)^2]=(1+t^2)x^2+\frac{1}{t^2}y^2$

则$(1+t^2)$: $\frac{1}{t^2}$=1:1(下略　　).

【巩固训练】

1.已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，则 $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+5}{2bc+ac}$ 的最小值为__________．

2.已知正实数 x，y 满足 $x^2+xy-2y^2=1$，则 $5x-2y$ 的最小值为_______．

3.已知 $a,b,c>0$，则 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}$ 的最小值为____________.

4.当 m,n 是正实数时，$\frac{4m+n}{m^2+n^2+1}$ 的最大值是______．

【答案或提示】

1.【答案】4

【解析】注意到分母中因式均含 c，故需拆分子含"c^2"项的系数

设$a^2+b^2+c^2=(a^2+tc^2)+[b^2+(1-t)c^2]\geq 2\sqrt{t}ac+2\sqrt{1-t}bc$

故$\sqrt{t}$：$\sqrt{1-t}=1:2$，解之得：$t=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$a^2+b^2+c^2\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}(ac+2bc)$

当且仅当$a^2=\frac{1}{5}c^2$，$b^2=\frac{4}{5}c^2$，即$a=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$时，等号成立.

则$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+5}{2bc+ac}\geq\frac{4(ac+2bc)}{5}+\frac{5}{2bc+ac}\geq 4$，当且仅当 $2bc+ac=5$ 时，等号成立.

2.【答案】4

【解析】：将已知条件左边分解因式得 $x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)=1$

因为 x，y 是正实数，且$(x-y)(x+2y)=1>0$，所以 $x-y>0$ ，　$x+2y>0$

设 $5x-2y=a(x-y)+b(x+2y)$，则 $a=4$，$b=1$，所以 $5x-2y=4(x-y)+(x+2y)$

由基本不等式得 $4(x-y)+(x+2y)\geq 2\sqrt{4(x-y)(x+2y)}=4$.

3.【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析一】$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=\frac{(a^2+\frac{1}{5}b^2)+(\frac{4}{5}b^2+c^2)}{ab+2bc}\geq\frac{2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{5}b^2}+2\sqrt{\frac{4}{5}b^2\cdot c^2}}{ab+2bc}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析二】$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=\frac{(\frac{a}{b})^2+1+(\frac{c}{b})^2}{\frac{a}{b}+2\frac{c}{b}}$，设$\frac{a}{b}=x,\frac{c}{b}=y$，$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}=t(t>0)$.

则满足等式$\frac{x^2+1+y^2}{x+2y}=t$的 x,y 存在，去分母后配方得：$(x-\frac{t}{2})^2+(y-t)^2=\frac{5}{4}t^2-1$，故$\frac{5}{4}t^2-1\geq 0$，解得

$t\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.【答案】$\frac{\sqrt{17}}{2}$

【解法一】$\frac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\frac{4m+n}{m^2+\frac{16}{17}+n^2+\frac{1}{17}}\leq\frac{4m+n}{2m\sqrt{\frac{16}{17}}+2n\sqrt{\frac{1}{17}}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

【解法二】设 $\frac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\frac{1}{t}(t>0)$

所以 $m^2+n^2+1=t(4m+n)$,即 $(m-2t)^2+(n-\frac{t}{2})^2=\frac{17}{4}t^2-1$

故 $\frac{17}{4}t^2-1\geq 0$,解之得 $\frac{1}{t}\geq\frac{\sqrt{17}}{2}$.

【解法三】令 $m^2+n^2=r^2$, $m=r\cos\theta, n=r\sin\theta$

$$\frac{4m+n}{m^2+n^2+1}=\frac{4r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2+1}=\frac{\sqrt{17}r\sin(\theta+\alpha)}{r^2+1}\leq\frac{\sqrt{17}r}{r^2+1}=\frac{\sqrt{17}}{r+\frac{1}{r}}\leq\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

专题21　一类貌似神离的不等式求最值

【方法点拨】

1.已知 $ax+by=xy$，求 $mx+ny$ 的最值型(其中 a、b、m、n 均为正数).

此类问题应归结为“知和求和”型，解决的策略是利用常数代换，即将“1”将已知与所求进行相乘，从而得到常数项与互为倒数的两项，然后利用均值不等式求解；也可用“权方和不等式”求解.

2.已知 $ax+by+cxy+d=0$，求 $mx+ny$ 的最值型.

此类问题应采取“强分”的方法，即将 $ax+by+cxy+d=0$ 分解为 $\left(ex+f\right)\left(gy+h\right)=t$，然后直接使用基本不等式求解为最简单途径.

【典型题示例】

例1　已知 $x>0,y>0,x+y=xy$，求 $2x+y$ 的最小值.

【答案】$3+2\sqrt{2}$

【解析一】对 $x+y=xy$ 两边同时除以 xy 得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

$$2x+y=\left(2x+y\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}+3\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}+3=2\sqrt{2}+3\text{(等号成立条件略)}$$

即 $2x+y$ 的最小值 $3+2\sqrt{2}$.

【解析二】(权方和不等式)对 $x+y=xy$ 两边同时除以 xy 得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

所以 $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{2x}+\frac{1}{y}\geq\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{2x+y}$

所以 $2x+y\geq 3+2\sqrt{2}$ (等号成立条件略)

即 $2x+y$ 的最小值 $3+2\sqrt{2}$.

说明：

1. 已知 $x,y,a,b\in R^+$，则有：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\geq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{x+y}$(当且仅当 $x:y=\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 时，等号成立).上式称为二元变量的权方和不等式，用于“知和求和型”求最值.
2. 此类问题还可以通过消元以达到减元的目的来求解，由 $y=\frac{x}{x-1}$，再代入到所求表达式，求出最值即可，但要注意 x 的范围需由 $y>0$ 缩定.

例 2　已知 $x>0,y>0,2x+y+xy=4$，求 $2x+y$ 的最小值.

【解析】因为 $2x+y+xy=(2x+xy)+y=(2+y)x+y=(2+y)x+(y+2)-2$

$=(x+1)(y+2)-2$

所以 $2x+y+xy=4\Rightarrow(x+1)(y+2)=6$

所以 $2x+y=2(x+1)+(y+2)-4\geq 2\sqrt{2(x+1)\cdot(y+2)}-4=4\sqrt{3}-4$，

即 $(2x+y)_{\min}=4\sqrt{3}-4$.

说明：

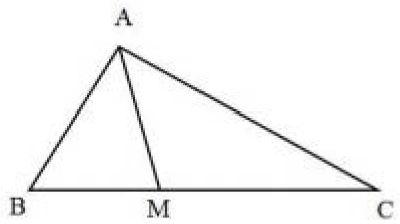
此类问题还可以通过消元以达到减元的目的来求解，由 $2x+y+xy=4\Rightarrow y=\dfrac{4-2x}{x+1}$，再代入到所求表达式 $2x+y=2x+\dfrac{4-2x}{x+1}$，求出最值即可，但要注意 x 的范围需由 $y>0$ 缩定 $x\in(0,2)$.

【巩固训练】

1.已知正实数 x,y 满足 $xy+2x+y=4$，则 $x+y$ 的最小值为__________

2. 已知 $a>2b>0$，$a+b=1$，则 $\dfrac{1}{a-2b}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为________.

3.如图，已知三角形 ABC 中，$AB=1$，$AC=2$，若点 M 为线段 BC 的三等分点(靠近 B 点)，则 $\dfrac{1}{|\overrightarrow{AM}|^2}+\dfrac{2}{|\overrightarrow{BC}|^2}$ 的最小值为______ .



4. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $x+y=1$ 则 $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{y^2}{y+1}$ 的最小值是_______ .

5.已知 $x>1$，$y>1$，则 $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$ 的最小值是_______ .

6.已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{b+1}$ 的最小值是_______ .

7.已知 $x>1$，$y>1$，$xy=10$，则 $\dfrac{1}{\lg x}+\dfrac{4}{\lg y}$ 的最小值是_______ .

8. 已知正数x,y满足$x+2y=2$，则$\dfrac{x+8y}{xy}$的最小值为________.

9.已知$x\in(0,3)$，则$y=\dfrac{2x-8}{x-3}+\dfrac{1}{2x}$的最小值为________ .

10.已知正实数 x，y 满足 $x+y=xy$，则$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{9y}{y-1}$的最小值是_______.

11.已知 $a>0$，$b>0$，且$\dfrac{2}{a+2}+\dfrac{1}{a+2b}=1$，则$a+b$的最小值是_______ .

【答案或提示】

1.【答案】$2\sqrt{6}-3$

2.【答案】$\dfrac{25}{18}$

3.【答案】$\dfrac{25}{18}$

【解析】$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\dfrac{8}{9}+\dfrac{8}{9}\cos\alpha$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=5-4\cos\alpha$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{AM}\right|^2}+\frac{2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}=\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha}+\frac{2}{5-4\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{8}}{1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}$$

$$\geq\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{(1+\cos\alpha)+\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}=\frac{25}{18}.$$

4.【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】，$\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{y^2}{y+1}\geq\dfrac{(x+y)^2}{x+y+3}=\dfrac{1}{4}$

当$\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{y}{y+1}$，即$x=\dfrac{2}{3},y=\dfrac{1}{3}$时，等号成立．

5.【答案】8

【解析】令$x+y-2=t(t>0)$

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq\frac{(x+y)^2}{x+y-2}=\frac{(t+2)^2}{t}=t+\frac{4}{t}+4\geq 8$$

当$\begin{cases}x+y-2=2\\ \dfrac{x}{y-1}=\dfrac{y}{x-1}\end{cases}$，即$x=2,y=2$，两个等号同时成立．

6.【答案】$\dfrac{5}{4}$

【解析】$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{b+1}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1-b}{b+1}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{2-(1+b)}{b+1}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{2b+2}-1$

$$\geq\frac{(1+2)^2}{2a+2b+2}-1=\frac{5}{4}$$

当$\dfrac{1}{2a}=\dfrac{2}{2+2b}$，即$a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{1}{3}$，$\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{b+1}\right)_{\min}=\dfrac{5}{4}$．

7.【答案】：9

【解析】∵$x>1$，$y>1$，$xy=10$，

$\therefore \lg x+\lg y=1$，且$\lg x>0,\lg y>0$

$\therefore \frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}\geq\frac{\left(1+\sqrt{4}\right)^2}{\lg x+\lg y}=9$，当且仅当$x=10^{\frac{1}{3}}$时取“＝”．

8.【答案】9

【解析】$\frac{x+8y}{xy}=\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{x}+\frac{2}{2y}\geq\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2}{x+2y}=9$

当且仅当$x=\frac{4}{3},y=\frac{1}{3}$，等号成立.

9.【答案】$\frac{7}{2}$

【解析】$y=\frac{2x-8}{x-3}+\frac{1}{2x}=2+\frac{2}{3-x}+\frac{1}{2x}=2+\frac{4}{6-2x}+\frac{1}{2x}\geq2+\frac{\left(\sqrt{4}+1\right)^2}{(6-2x)+2x}=\frac{7}{2}$

当且仅当$x=1$时,等号成立.

10.【答案】:15

【解析】$x+y=xy$可化为$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，

$$\frac{1}{x-1}+\frac{9y}{y-1}=\frac{x}{x-1}+\frac{9y}{y-1}-1=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+\frac{9}{1-\frac{1}{y}}-1\geq\frac{\left(1+\sqrt{9}\right)^2}{(1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{y})}-1=15.$$

11.【答案】$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【解析】$1=\frac{2}{a+2}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2a+2b+2}$

当$\frac{\sqrt{2}}{a+2}=\frac{1}{a+2b}$，即$a=\sqrt{2},b=\frac{1}{2}$，$(a+b)_{\min}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$．

专题 22　一类过定点问题的不等式恒成立

【方法点拨】

将恒成立问题转化为两函数的位置关系问题，难点在于发现两函数过定点.

【典型题示例】

例 1　设 a∈**R**，若 $x>0$ 时均有$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$，则 $a=$____________ .

【答案】$\frac{3}{2}$

【分析】本题解法较多，按照一般思路，则可分为以下两种情况：

(A) $\begin{cases}(a-1)x-1\le 0\\ x^2-ax-1\le 0\end{cases}$，无解；　　(B) $\begin{cases}(a-1)x-1\ge 0\\ x^2-ax-1\ge 0\end{cases}$，无解 .

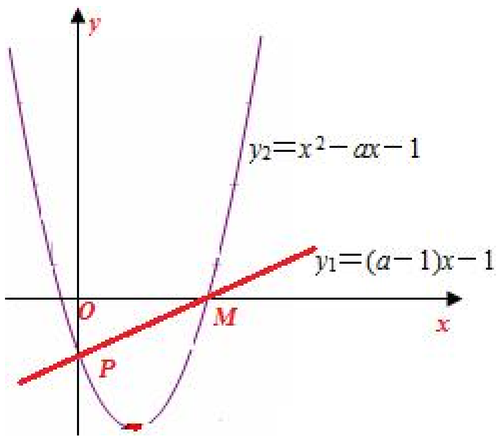
因为受到经验的影响，会认为本题可能是错题或者解不出本题．其实在 $x>0$ 的整个区间上，我们可以将其分成两个区间(为什么是两个？)，在各自的区间内恒正或恒负．(如下图)

我们知道：函数 $y_1=(a-1)x-1$，$y_2=x^2-ax-1$ 都过定点 $P(0,1)$．

考查函数 $y_1=(a-1)x-1$：令 $y=0$，得 $M(\frac{1}{a-1},0)$，还可分析得：$a>1$；

考查函数 $y_2=x^2-ax-1$：显然过点 $M(\frac{1}{a-1},0)$，代入得：$\left(\frac{1}{a-1}\right)^2-\frac{a}{a-1}-1=0$，解之得：$a=0$，或者 $a=\frac{3}{2}$，

舍去 $a=0$，得答案：$a=\frac{3}{2}$.



点评：

本题的关键在于，一是将恒成立问题转化为利用"形"进一步转化为两函数的位置关系问题，二是发现两函数在 x 轴的右侧过定点.

【巩固训练】

1. 对任意的 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $(ax^2+a^2x-2)\ln x \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值的集合是__________.

2.对任意的 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $(x-a+\ln\dfrac{x}{a})(-2x^2+ax+10) \leq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

3.已知不等式 $(ax+3)(x^2-b) \leq 0$ 对于任意的 $x \in (0,+\infty)$ 恒成立，其中 a,b 是整数，则 $a+b$ 的取值集合为________.

【答案或提示】

1.【答案】$\{1\}$

【解析】设 $f(x)=ax^2+a^2x-2$， $g(x)=\ln x$

因为 $g(x)=\ln x$ 恒过点(1,0)，所以必有 $\begin{cases} f(1)=a+a^2-2=0 \\ a>0 \end{cases}$，解之得 $a=1$.

2.【答案】$\{\sqrt{10}\}$

【分析】考虑从“形”出发.

设 $f(x)=x-a+\ln\dfrac{x}{a}$， $g(x)=-2x^2+ax+10$

易知 $a>0$，且函数 $f(x)$ 横过点 $(a,0)$

又 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上增

必有 $g(x)=-2x^2+ax+10$ 过 $(a,0)$

所以 $-2a^2+a^2+10=0$，解之得 $a=\pm\sqrt{10}$

又 $a>0$，所以 $a=\sqrt{10}$.

3.【答案】$\{-2,8\}$

【解析】构造“形”易得 $\sqrt{b}=-\dfrac{3}{a}$，即 $a\sqrt{b}=-3$

$\because$ a,b 是整数

$\therefore$ $\begin{cases} a=-3 \\ \sqrt{b}=1 \end{cases}$，或 $\begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{b}=3 \end{cases}$

解之得：$\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$，或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=9 \end{cases}$

所以 $a+b=-2$或8，故 $a+b$ 的取值集合为 $\{-2,8\}$.

专题 23　几类函数的对称中心及应用

【方法点拨】

1.三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的对称中心为(x_0 , $f(x_0)$), 其中 $f''(x_0)=0$, 即 $f''(x_0)=6ax_0+2b=0$, $x_0=-\dfrac{b}{3a}$.

记忆方法：类比于二次函数的对称轴方程 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ ，分母中 $2\to 3$.

2. 一次分式函数(或称双曲函数) $f(x)=\dfrac{cx-d}{ax-b}(ac\neq 0)$ 的对称中心为 $(\dfrac{b}{a},\dfrac{c}{a})$.

记忆方法：横下零，纵系数(即横坐标是使分母为 0 的值，而纵坐标是分母、分子中的一次项系数分别作为分母、分子的值).

3. 指数复合型函数 $f(x)=\dfrac{n}{a^x+m}$ $(a>0且a\neq 1, mn\neq 0)$ 的对称中心为 $(\log_a^{|m|},\dfrac{n}{2m})$.

记忆方法：横下对，纵半分(即横坐标是使分母取对数的值，但真数为保证有意义，取的是绝对值而已，而纵坐标是分母、分子中的常数分别作为分母、分子的值的一半).

【典型题示例】

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{3^x+1}-2x$ ，则满足不等式 $f(a)+f(3a+2)>2$ 的实数 a 的取值范围是___________.

【答案】 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】 $y=\dfrac{2}{3^x+1}$ 的对称中心是 $(0,1)$ ，其定义域为 R 且单减

令 $g(x)=f(x)-1=\dfrac{2}{3^x+1}-2x-1$ ，则 $g(x)$ 为 R 上的单调递减的奇函数

由 $f(a)+f(3a+2)>2$ 得 $f(3a+2)-1>1-f(a)$

即 $g(3a+2)>-g(a)$

因为 $g(x)$ 为奇函数，故 $-g(a)=g(-a)$

所以 $g(3a+2)>g(-a)$

又 $g(x)$ 在 R 上单减，所以 $3a+2<-a$ ，解之得 $a<-\dfrac{1}{2}$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$.

例 2 (2021·江苏镇江中学·开学初)设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导数， $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0 ，则称点(x_0 ， $f(x_0)$)为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”．已知：任何三次函数都有拐点，又有对称中心，且拐点就是对称中心．设 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+\dfrac{8}{3}x+1$ ，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-7$ ，则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_8)$ $=$_______ .

【解析】令 $f''(x)=2x-4=0$ 得 $x=2$， $f(2)=1$

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+\dfrac{8}{3}x+1$ 对称中心为 $(2,1)$，

所以 $f(x)+f(4-x)=2$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立

因为 $a_n=2n-7$， 所以 $a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5=4$

所以 $f(a_1)+f(a_8)=f(a_2)+f(a_7)=f(a_3)+f(a_6)=f(a_4)+f(a_5)=2$

所以 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_8)=8$.

例 3　已知函数 $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-a}$，若对 $\forall x\in N^*$， $f(x)\le f(5)$恒成立，则 a 的取值范围是_______ .

【答案】 $5<a<6$

【巩固训练】

1. 函数 y= $\dfrac{-x+2}{x-4}$ 的对称中心是____________________ .

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+2-a}{x+1}$ (其中 $a\in R$)图象关于点 $P(-1，3)$成中心对称，则不等式 $f(x)>x-1$ 的解集是____________________ .

3. 设函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$， 数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列， $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$， 则 $a_1+a_2+\cdots+a_7=($　　$)$

A、0　　B、7　　C、14　　D、21

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=kx+2-2k$ 与曲线 $y=2(x-2)^3+x$ 依次交于 A,B,C 三点，若点 P 使 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}|=2$，则 $|\overrightarrow{PB}|$ 的值为____.

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 的图象关于坐标原点对称，则实数 a 的值为____.

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}+2x$，则满足不等式 $f(a)+f(3a+2)>0$ 的实数 a 的取值范围是___________.

【答案或提示】

1.【答案】(4，-1)

2.【答案】$\{x|x<-1或0<x<3\}$

【解析】函数 $f(x)=\dfrac{ax+2-a}{x+1}$ 的对称中心为(－1，a)，与 P(－1，3)比较得 $a=3$.此时 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1}$，不等式

$f(x)>x-1$，即 $\dfrac{3x-1}{x+1}>x-1\Leftrightarrow\dfrac{3x-1}{x+1}-(x-1)>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{x(x-3)}{x+1}<0\Leftrightarrow x(x+1)(x-30<0$，由序轴标根法即得解集为$\{x|x<-1或0<x<3\}$.

3.【答案】D

【提示】根据函数值之和 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_7)=14$ 求自变量之和 $a_1+a_2+\cdots+a_7$，很自然会去考虑函数的性质，而等式常常考查对称性，从而尝试去寻求函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 的对称中心.

函数 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 可以视为由 $y=(x-3)^3$ 与 $y=x-1$ 构成，它们的对称中心不一样，可以考虑对函数的图象进行平移，比如 $f(x)-2=(x-3)^3+(x-3)$，引入函数 $F(x)=f(x+3)-2=x^3+x$，则该函数是奇函数，对称中心是坐标原点，由图象变换知识不难得出 $f(x)=(x-3)^3+x-1$ 的图象关于点 $(3,2)$ 中心对称.

4.【答案】1

【分析】$y=kx+2-2k$ 过定点(2,2)， 对于三次函数 $y=2(x-2)^3+x$，令 $f''(x)=12(x-2)=0$ 得 $x=2$，又 $f(2)=2$，所以 $y=2(x-2)^3+x$ 也关于点(2,2)对称，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PB}$，$\left|\overrightarrow{PB}\right|=1$.

5.【答案】－1

6.【答案】$\left(-\dfrac{1}{2}+\infty\right)$

【解析】$f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x+1}+2x=\dfrac{3^x+1-2}{3^x+1}+2x=1-\dfrac{2}{3^x+1}+2x$ 的对称中心是 $(0,0)$，其定义域为 R 且单增(下略).

专题 24　与圆相关的张角问题

【方法点拨】

1. 圆外一点与圆上两点的连线的夹角，以这两条直线为切线时最大；
2. 圆外一点与圆上一点及圆心连线的夹角，以这条直线为切线时最大.

【典型题示例】

例 1　设点 $M\left(m,1\right)$，若在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=30^{\circ}$，则 m 的取值范围是(　　　)

A. $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left[-2,2\right]$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

【答案】A

【分析】由圆的性质可知：圆上一点 T，与 M,O 所组成的角 $\angle OMT$，当 MT 与圆相切时，$\angle OMT$ 最大.所以若圆上存在点 N，使得 $\angle OMN=30^{\circ}$，则 $\angle OMT\geq 30^{\circ}$.由 $M\left(m,1\right)$ 和 $x^2+y^2=1$ 可知过 M 且与圆相切的一条直线为 $y=1$，切点 $T\left(0,1\right)$，所以在直角三角形 OMT 中，$\tan OMT=\frac{|OT|}{|TM|}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $|TM|\leq\sqrt{3}\Rightarrow-\sqrt{3}\leq m\leq\sqrt{3}$.

例 2　已知圆 O：$x^2+y^2=1$，动圆 M：$(x-a)^2+(y-a+4)^2=1$.若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使得 $\angle APB=60°$，则实数 a 的取值范围为________.

【答案】$\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】由题意得圆心 $M(a，a-4)$在直线 $x-y-4=0$ 上运动，所以动圆 M 是圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，半径为 1 的圆．又因为圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，使 $\angle APB=60°$，所以 $OP=2$，即点 P 也在 $x^2+y^2=4$ 上，于是 $2-1\leq\sqrt{a^2+(a-4)^2}\leq 2+1$，即 $1\leq\sqrt{a^2+(a-4)^2}\leq 3$，解得 $2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，故实数 a 的取值范围是$\left[2-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

【巩固训练】

1.设点 M(x_0 ,1)，若在圆 O: $x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得∠OMN=45°，则 x_0 的取值范围是_______.

2.已知圆 $M:(x-1)^2+(y-1)^2=4$，直线 $l:x+y-6=0, A$ 为直线 l 上一点，若圆 M 上存在两点 B,C，使得 $\angle BAC=60^{\circ}$，则点 A 的横坐标的取值范围是___________.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C:(x+2)^2+(y-m)^2=3$．若圆 C 存在以 G 为中点的弦 AB，且 $AB=2GO$，则实数 m 的取值范围是___________　　.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 O: $x^2+y^2=1$，圆 M: $(x+a+3)^2+(y-2a)^2=1$(a 为实数)．若圆 O 与圆 M 上分别存在点 P，Q，使得∠$OQP=30°$，则 a 的取值范围为_______ .

5.已知圆 C：$(x-2)^2+y^2=4$，线段 EF 在直线 l：$y=x+1$ 上运动，点 P 为线段 EF 上任意一点，若圆 C 上存在两点 A，B，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leq 0$，则线段 EF 长度的最大值是________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 M,N 两点，点 P 在圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 上运动．若 $\angle MPN$ 恒为锐角，则实数 a 的取值范围是_________.

【答案或提示】

1.【答案】 $[-1,1]$

2.【答案】 [1,5]

3.【答案】 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. 【答案】$[-\frac{6}{5}, 0]$

5.【答案】$\sqrt{14}$

【解析】由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0$ 得 $\angle APB\ge 90°$，从直线上的点向圆上的点连线成角，当且仅当两条线均为切线时，$\angle APB$ 才是最大的角，不妨设切线为 PM，PN，当 $\angle APB\ge 90°$时， $\angle MPN\ge 90°$，$\sin\angle MPC=\frac{2}{PC}\ge\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $PC\le 2\sqrt{2}$.另当过点 P，C 的直线与直线 l：$y=x+1$ 垂直时，$PC_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，以 C 为圆心，$CP=2\sqrt{2}$为半径作圆交直线 l 于 E，F 两点，这时的线段长即为线段 EF 长度的最大值，所以 $EF_{\max}=2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{14}$.

6.【答案】 $(-\infty,-4)\cup(\sqrt{7}-1,+\infty)$

【错解】考虑若 $\angle MPN$ 为直角,则动圆与以 M,N 为直径的圆相外切，故两圆相离时，满足题意，所以 $\sqrt{(a+1)^2+1}>2\sqrt{2}$，解之得：$a>\sqrt{7}-1$或$a<-\sqrt{7}-1$.

【错因】当动圆在左侧时，此时，圆与已知直线 $y=x+2$ 相交，圆上存在点与 M,N 两点连线构成的角为零角，需排除.还需动圆与直线 $y=x+2$ 相离.

专题 25　圆的弦被内(外)分成定比

【方法点拨】

1.利用垂径定理通过二次解直角三角形求出弦长，进而求出“弦心距”，最后利用“点线距”列方程；

2.利用圆幂定理(相交弦定理、切割线定理、割线定理)求出弦长，然后同上.

【典型题示例】

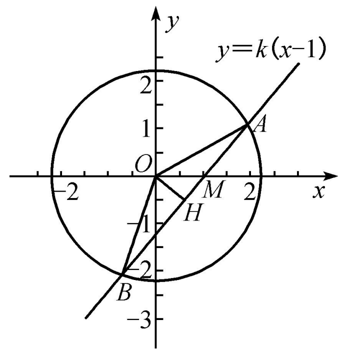
例 1　在平面直角坐标系 xOy 中，过点 $M(1,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点，其中 A 点在第一象限，且 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，则直线 l 的方程为______________.

【答案】$y=x-1$

【分析】本题思路有下列几种：①利用向量坐标设点转化，点参法；②设直线方程的在 x 轴上的截距式，联立方程组；③垂径定理后二次解三角形；④相交弦定理；⑤利用”爪”型结构,得 $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$,两边平方求得 $\angle AOB$ 的余弦值.

【解法一】：易知直线 l 的斜率必存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$.



如图，过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，则 $BH=\frac{3t}{2}$.

设 $OH=d$，在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$.

在 Rt△OMH 中，$d^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=OM^2=1$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$，

则 $d^2=\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{1}{2}$，解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

因为点 A 在第一象限，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，由图知 $k=1$，

所以所求的直线 l 的方程为 $y=x-1$.

【解法二】由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，设 $BM=2t$，$MA=t$

又过点 M 的直径被 M 分成两段长为 $\sqrt{5}-1$、$\sqrt{5}+1$

由相交弦定理得 $2t^2=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$，解之得 $t=\sqrt{2}$

过原点 O 作 $OH\perp l$ 于点 H，

在 Rt△OBH 中，$d^2+\left(\frac{3t}{2}\right)^2=r^2=5$，解得 $d^2=\frac{1}{2}$，(下同解法一，略).

【解法三】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{BM}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1,y_1)$.

因为$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以$\begin{cases}1-x_2=2\ \ x_1-1\ \ ,\\-y_2=2y_1.\end{cases}$

当直线 AB 的斜率不存在时，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$，不符合题意.

当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，

联立$\begin{cases}y=k\ \ x-1\ \ ,\\x^2+y^2=5,\end{cases}$得$(1+k^2)y^2+2ky-4k^2=0$，则$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-2k}{1+k^2},\\y_1\cdot y_2=\dfrac{-4k^2}{1+k^2},\\-y_2=2y_1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}y_1=\dfrac{2k}{1+k^2},\\y_2=\dfrac{-4k}{1+k^2},\end{cases}$所以 $y_1\cdot y_2=\dfrac{-8k^2}{1+k^2\ \ {}^2}=\dfrac{-4k^2}{1+k^2}$，即 $k^2=1$.又点 A 在第一象限，

所以 $k=1$，即直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

【解法四】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\overrightarrow{BM}=(1-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-1,y_1)$.

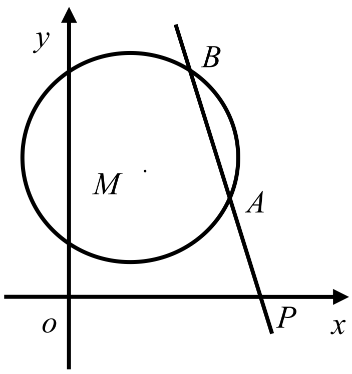
因为$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以$\begin{cases}1-x_2=2\ \ x_1-1\ \ ,\\-y_2=2y_1,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_2=2x_1-3,\\-y_2=2y_1.\end{cases}$

又$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=5,\\x_2^2+y_2^2=5,\end{cases}$代入可得$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=5,\\\ \ 2x_1-3\ \ {}^2+4y_1^2=5,\end{cases}$解得 $x_1=2$，代入可得 $y_1=\pm1$.又点 A 在第一象限，故 $A(2,1)$，

由点 A 和点 M 的坐标可得直线 AB 的方程为 $y=x-1$.

点评：上述各种解法中，以解法一、解法二最简、最优.

例 2　已知圆 M：$(x-1)^2+(y-3)^2=4$，过 x 轴上的点 $P(a,0)$ 存在一直线与圆 M 相交，交点为 A、B，且满足 $PA=BA$，则点 P 的横坐标 a 的取值范围为_________.



【答案】$1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法一】取 AB 中点 C，连接 MC、MP，

设 $AB=2m$，则$\begin{cases}MC^2+m^2=r^2\\MC^2+(3m)^2=MP^2\end{cases}$，相减得 $MP^2=8m^2+r^2=8m^2+4$，$\because 0<m\le r$　$\therefore$ $MP^2=8m^2+4\le 36$，即 $(a-1)^2+3^2\le 36$

$\therefore 1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法二】由圆幂定理得：$PA\cdot PB=PM^2-R^2$

设 $AB=2m$，代人上式得：$8m^2=\left[(a-1)^2+9\right]-4$，即 $8m^2=(a-1)^2+5$

$\because 0<m\le 2 \qquad \therefore 0<(a-1)^2+5\le 32$

$\therefore 1-3\sqrt{3}\le a\le 1+3\sqrt{3}$

【解法三】(利用圆中最长弦为直径，得出 *PA* 范围，而 *PA* 的两个端点都在动，以静制动，然后再将 *PA* 范围转化为 *PM* 范围问题)

因为 *PA=BA*，所以 *PA* 的最大值为 2，故 *PM* 的最大值为 4(下略).

【巩固训练】

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，若圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，则 $r=$__________ .

2.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(0,1)$ 在圆 C：$x^2+y^2+2mx-2y+m^2-4m+1=0$ 内，若存在过点 P 的直线交圆 C 于 A、B 两点，且△PBC 的面积是△PAC 的面积的 2 倍，则实数 m 的取值范围为______________.

3.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C:(x+2)^2+(y-m)^2=3$．若圆 C 存在以 G 为中点的弦 AB，且 $AB=2GO$，则实数 m 的取值范围是____________.

4.已知直线 $y=ax+3$ 与圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 相交于 A,B 两点，点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在直线 $y=2x$ 上且 $PA=PB$，则 x_0 的取值范围为____________.

【答案或提示】

1.【答案】 $\sqrt{10}$

【解法一】遇线性表示想求模，将向量问题实数化.

$$\overrightarrow{OC}^2=\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)^2=\frac{25}{16}\overrightarrow{OA}^2+2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{9}{16}\overrightarrow{OB}^2,$$

即 $r^2=\frac{25}{16}r^2+\frac{15}{8}r^2\cos\angle AOB+\frac{9}{16}r^2$，整理化简得 $\cos\angle AOB=-\frac{3}{5}$.

过点 O 作 AB 的垂线交 AB 于 D，

则 $\cos\angle AOB=2\cos^2\angle AOD-1=-\frac{3}{5}$，得 $\cos^2\angle AOD=\frac{1}{5}$.

又圆心到直线的距离$OD=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以$\cos^2\angle AOD=\dfrac{1}{5}=\dfrac{OD^2}{r^2}=\dfrac{2}{r^2}$， $r=\sqrt{10}$.

【解法二】注意到线性表示时的系数和为 2，联想“三点共线”.

由$\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，即$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OB}$

得 A、B、D 三点共线(其中 D 是 AB 的中点)，且 $AD:BD=3:5$，

设 $AD=3x$， $BD=5x$

思路一：垂径定理后二次解三角形，$\begin{cases}\left(\dfrac{r}{2}\right)^2=x^2+\sqrt{2}^2\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得$r=\sqrt{10}$.

思路二：相交弦定理，$\begin{cases}3x\cdot 5x=\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{3r}{2}\\ r^2=(4x)^2+\sqrt{2}^2\end{cases}$，解之得$r=\sqrt{10}$.

2.【答案】$\left[\dfrac{4}{9},4\right)$

3.【答案】 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

【简析】易知$OA\perp OB$，考察临界状态，只需过原点作圆的切线，切点弦的张角大于等于直角即可.

4.【答案】 $(-1,0)\cup(0,2)$

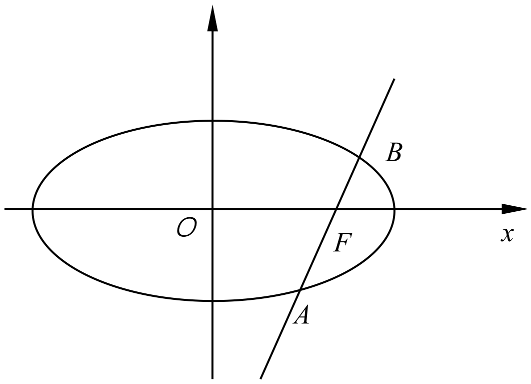
专题 26　椭圆的焦点弦被焦点分成定比

【方法点拨】

1. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与椭圆相交于 A、B 两点，直线 l 的倾斜角为 θ，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，则 e、θ、λ 间满足 $\left|e\cos\theta\right|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$.

2.长短弦公式:如下图,长弦 $AF=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$,短弦 $BF=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$(其中 p 是焦参数，即焦点到对应准线的距离，θ 是直线 l 与 x 轴的夹角，而非倾斜角).

说明：公式 1 的推导使用椭圆的第二定义，不必记忆，要有“遇过将焦半径转化为到准线距离”的意识即可.



【典型题示例】

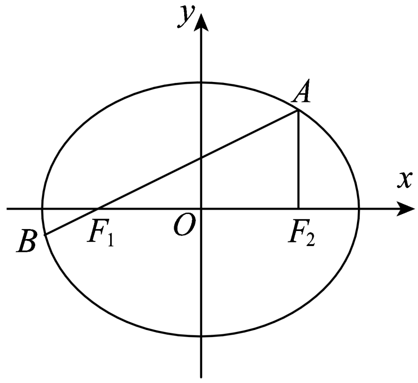
例 1　　设 F_1, F_2 分别是椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点. 若 $|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的离心率为________.

【答案】: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】如图，设直线 AB 的倾斜角为 θ

则 $Rt\triangle AF_1F_2$， $F_1F_2=2c, AF_1=\dfrac{b^2}{a}$

所以 $\cos\theta=\dfrac{2c}{\sqrt{4c^2+\dfrac{b^4}{a^2}}}$

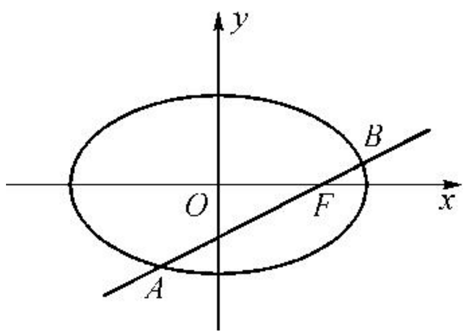


由$|AF_1|=3|F_1B|$、长短弦公式得：$\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}=\dfrac{3ep}{1+e\cos\theta}$，化简得：$2e\cos\theta=1$

代入得：$\dfrac{4ec}{\sqrt{4c^2+\dfrac{b^4}{a^2}}}=1$，即 $4e=\sqrt{4+\dfrac{b^4}{a^2c^2}}=\sqrt{4+\left(\dfrac{a^2-c^2}{ac}\right)^2}=\sqrt{4+\left(\dfrac{1}{e}-e\right)^2}$

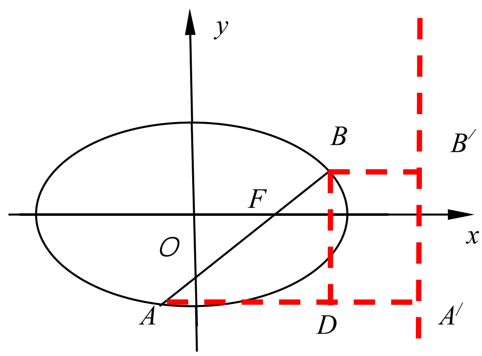
解之得：$e^2=\dfrac{1}{3}$（负值已舍），所以 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 2　　已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，与过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$的直线相交于 A，B 两点．若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 $k=$________.



【答案】$\sqrt{2}$

【解析】如右图，设 l 为椭圆的右准线，过 A、B 分别向 l 作垂线 AA'、BB'，A'、B'分别是垂足，过 B 作 AA'垂线 BD，D 是垂足



设 $BF=t$ ， $AF=3t$

则 $BB'=\dfrac{t}{e}$， $AA'=\dfrac{3t}{e}$

$Rt\triangle ABD$ 中， $AD=\dfrac{2t}{e}, AB=4t$

故 $\cos\theta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

又 $k>0$，所以 $k=\tan\theta=\sqrt{2}$.

【巩固训练】

1. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为________.

2. 已知 F 是抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A，B 两点 .设 $|FA|>|FB|$，则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于________ .

【答案或提示】

1.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2.【答案】$3+2\sqrt{2}$

专题 27　根与系数关系的非对称运用

【方法点拨】

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，若 $\Delta>0$，设它的两个根分别为 x_1,x_2，则有根与系数关系：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$，借此我们往往能够利用韦达定理来快速处理 $|x_1-x_2|$、$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$、$x_1^2+x_2^2$ 之类的"对称结构"，但有时，我们会遇到涉及的不同系数的代数式的应算，比如求 $\dfrac{x_2}{x_1}$、$\lambda x_1+\mu x_2$ 之类的结构，就相对较难地转化到应用韦达定理来处理了.特别是在圆锥曲线问题中，我们联立直线和圆锥曲线方程，消去 x 或 y，也得到一个一元二次方程，我们就会面临着同样的困难，可采用反过来应用韦达定理，会有较好的作用.

【典型题示例】

例 1　已知圆 $C:(x+1)^2+y^2=8$，定点 $A(1,0)$，M 为圆上动点，点 P 在 AM 上，点 N 在 CM 上，且满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{NP}\bullet\overrightarrow{AM}=0$，点 N 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 E 的方程;

（2）过定点 $F(0,2)$ 的直线交曲线 E 于不同的两点 G、H(点 G 在点 F、H 之间)，且满足 $\overrightarrow{FG}=\lambda\overrightarrow{FH}$，求 λ 的取值范围.

【分析】求 λ 的取值范围，突破口在于将 $\overrightarrow{FG}=\lambda\overrightarrow{FH}$ 转化为 $\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$，可以直接用向量转化，也可以用三角相似转化.

下一步关键在于如何将 λ 和 k 联系，处理策略是 $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\gamma+\dfrac{1}{\gamma}+2$，这样就建立了 λ 和 k 联系，再利用 k 的取值范围就能求出 λ 的范围.

【解析】(1)$\because \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AM}=0$. $\therefore NP$ 为 AM 的垂直平分线，$\therefore |NA|=|NM|$

又 $\because |CN|+|NM|=2\sqrt{2}$, $\therefore |CN|+|AN|=2\sqrt{2}>2$ $\therefore$动点 N 的轨迹是以点 $C(-1,0)$，$A(1,0)$ 为焦点的椭圆，且椭圆

长轴长为 $2a=2\sqrt{2}$，焦距 $2c=2,a=\sqrt{2},c=1,b^2=1$. $\therefore$曲线 E 的方程 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（3）当直线 GH 斜率存在时，设直线 GH 方程为 $y=kx+2$，代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，得 $\left(\dfrac{1}{2}+k^2\right)x^2+4kx+3=0$，

由 $\varDelta>0$ 得 $k^2>\dfrac{3}{2}$.设 $G(x_1,y_1),H(x_2,y_2)$，

$x_1+x_2=\dfrac{-4k}{\frac{1}{2}+k^2}=\dfrac{-8k}{1+2k^2}$(1)，　$x_1x_2=\dfrac{3}{\frac{1}{2}+k^2}=\dfrac{6}{1+2k^2}$(2)

$\because \overrightarrow{FG}=\lambda\overrightarrow{FH}$, $\therefore (x_1,y_1-2)=\lambda(x_2,y_2-2)\therefore x_1=\lambda x_2, \therefore \lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$,

$$\frac{(1)^2}{(2)}\Rightarrow \lambda+\frac{1}{\lambda}+2=\frac{32k^2}{3(1+2k^2)}=\frac{32}{3\left(\frac{1}{k^2}+2\right)}$$

$\because k^2>\dfrac{3}{2}, \therefore 4<\dfrac{32}{3\left(\frac{1}{k^2}+2\right)}<\dfrac{16}{3}$, $\therefore$ $4<\lambda+\dfrac{1}{\lambda}+2<\dfrac{16}{3}.\dfrac{1}{3}<\lambda<3, \because 0<\lambda<1$ $\therefore \dfrac{1}{3}<\lambda<1$

又当直线 HG 斜率不存在方程 $x=0, \overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FH}, \lambda=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{1}{3}\le\lambda<1, \lambda\in\left[\dfrac{1}{3},1\right)$.

例 2　函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-ax^2+x+1$ 在 x_1,x_2 处有极值，且 $1<\dfrac{x_2}{x_1}\le 5$，求 a 的取值范围.

【答案】$\left(1,\dfrac{9}{5}\right]$

【解析】令 $f'(x)=ax^2-2ax+1=0$，则有 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=\dfrac{1}{a}$

令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则 $x_2=tx_1\,(1<t\le 5)$，得 $x_1+x_2=(1+t)x_1$，$x_1x_2=tx_1{}^2$，

所以 $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\dfrac{(1+t)^2}{t}$，即 $4a=t+\dfrac{1}{t}+2$，因为 $1<t\le 5$，解得 $1<a\le\dfrac{9}{5}$.

点评：像这种 $x_2=tx_1$ 非对称的结构，我们可以通过配凑成正常的韦达定理处理结构来. $x_2=tx_1$，得 $x_1+x_2=(1+t)x_1$，

$x_1x_2=tx_1^{\ 2}$，所以$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(1+t\right)^2}{t}$.

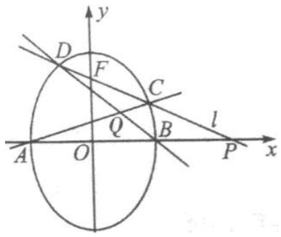
【巩固练习】

1. 设直线 l 过点 $P(0，3)$，和椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$顺次交于 A、B 两点，则$\dfrac{AP}{PB}$的取值范围为_________.

2.椭圆有两顶点 A(-1，0)、B(1，0)，过其焦点 F(0，1)的直线l与椭圆交于 C、D 两点，并与 x 轴交于点 P．直线 AC 与直线 BD 交于点 Q．

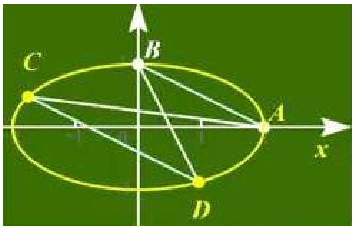
(I)当|CD |= $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$时，求直线l的方程;

(II)当点 P 异于 A、B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.



3.椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的左右顶点分别为 A、B，过椭圆的右焦点 F 的直线 l 交椭圆交于 P、Q 两点，设直线 AP 的斜率为 k_1，直线 BQ 的斜率为 k_2.证明：$\dfrac{k_1}{k_2}$为定值.

4. 已知 A、B 分别是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的右、上顶点，$CD∥AB$，C、D 在椭圆上，设直线 AC 的斜率为 k_1，直线 BD 的斜率为 k_2.证明：k_1k_2为定值.



5.已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$M$、$N$ 分别是上、下顶点，过点 $P(0,1)$的直线 l 交椭圆于 A、B 两点(异于 M、N)，直线 AM、BN 交于点 T.求证：点 T 的纵坐标为定值.

【答案或提示】

1.【答案】$\left[\frac{1}{5},1\right)$

【解析】设直线 l 的方程为：$y=kx+3$，代入椭圆方程，消去 y 得$(9k^2+4)x^2+54kx+45=0(*)$

则$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{54k}{9k^2+4} \\ x_1x_2=\dfrac{45}{9k^2+4} \end{cases}$，

注 意 到$\dfrac{AP}{PB}=\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right|=\dfrac{x_1}{x_2}$，设$\dfrac{x_1}{x_2}=\lambda$，则$x_1=\lambda x_2$，

所 以$x_1+x_2=(1+\lambda)x_1$，$x_1x_2=\lambda x_1^{\ 2}$，

所以$\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$，即$\lambda+\dfrac{1}{\lambda}+2=\dfrac{324k^2}{45k^2+20}$.

在(*)中，由判别式$\Delta>0$，可得$k^2>\dfrac{5}{9}$，

从而有$4<\dfrac{324k^2}{45k^2+20}<\dfrac{36}{5}$，所以$4<\lambda+\dfrac{1}{\lambda}+2<\dfrac{36}{5}$，解得$\dfrac{1}{5}<\lambda<5$.

结合$0<\lambda<1$，得$\dfrac{1}{5}<\lambda<1$.

综上，$\dfrac{1}{5}\le\dfrac{AP}{PB}<1$.

点评：

$x_1=\lambda x_2$ 经常出现在圆锥曲线的题型为：过点 Q 的直线与圆锥曲线交于不同的两点，A、B，且满足$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$之类的，或者是$\dfrac{QA}{QB}$之类的.其中$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，用坐标表示出来后，就可以选择一个较简单的式子来转化到韦达定理；$\dfrac{QA}{QB}$我们可以设他们的比值为λ，这样可以转化到$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，再用同样的办法来解决.

2.【答案】(I) $y=\sqrt{2}x+1$ 或 $y=-\sqrt{2}x+1$ ；(II)略.

【解析】(Ⅰ)因椭圆的焦点在 y 轴上，设椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，

由已知得$b=1$，$c=1$，所以$a^2=2$，则椭圆方程为$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$.

直线 l 垂直于 x 轴时与题意不符 .

设直线 l 的方程为$y=kx+1$，联立$\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}=1, \\ y=kx+1, \end{cases}$得$(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $\Delta=4k^2+4(k^2+2)=8(k^2+1)$，$x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$，

$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\dfrac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2}$.

由已知得 $\dfrac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，

所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+1$ 或 $y=-\sqrt{2}x+1$.

(Ⅱ)直线 l 垂直于 x 轴时与题意不符 .

设直线 l 的方程为 $y=kx+1$（$k\neq 0$ 且 $k\neq\pm1$），所以 P 点的坐标为 $(-\dfrac{1}{k},0)$.

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，由(Ⅰ)知 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$，

直线 AC 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，直线 BD 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，

方法一：

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1), \\ y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x-1), \end{cases}$ 设 $Q(x_0,y_0)$，解得 $x_0=\dfrac{1+\dfrac{y_1(x_2-1)}{y_2(x_1+1)}}{1-\dfrac{y_1(x_2-1)}{y_2(x_1+1)}}=\dfrac{y_2(x_1+1)+y_1(x_2-1)}{y_2(x_1+1)-y_1(x_2-1)}$，

不妨设 $x_1>x_2$，则 $x_0=\dfrac{(kx_2+1)(x_1+1)+(kx_1+1)(x_2-1)}{(kx_2+1)(x_1+1)-(kx_1+1)(x_2-1)}=\dfrac{2kx_1x_2+(x_1+x_2)+k(x_2-x_1)}{k(x_1+x_2)+(x_1-x_2)+2}$

$=\dfrac{\dfrac{-2k}{k^2+2}-\dfrac{2k}{k^2+2}-\dfrac{k\sqrt{8(k^2+1)}}{k^2+2}}{-\dfrac{2k^2}{k^2+2}+\dfrac{\sqrt{8(k^2+1)}}{k^2+2}+2}=\dfrac{-4k-2k\sqrt{2(k^2+1)}}{2\sqrt{2(k^2+1)}+4}=-k$，

因此 Q 点的坐标为 $(-k,y_0)$，又 $P(-\dfrac{1}{k},0)$，$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-k)\cdot(-\dfrac{1}{k})+0=1$.

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值 .

方法二：

联立方程 $\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1), \\ y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x-1), \end{cases}$ 消去 y 得

$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2+1)}=\dfrac{kx_1x_2+kx_2+x_1+1}{kx_1x_2-kx_1+x_2-1}$，($x_1$ 、x_2 的系数出现了不对称)

又 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{2+k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{1}{2+k^2}$，$x_1=-\dfrac{2k}{2+k^2}-x_2$，

代入上式可得，$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\left(-\dfrac{2k}{2+k^2}\right)+kx_2+\left(-\dfrac{2k}{2+k^2}-x_2\right)+1}{\left(-\dfrac{2k}{2+k^2}\right)-k\left(-\dfrac{2k}{2+k^2}-x_2\right)+x_2-1}=\dfrac{k+1}{k-1}$

即 $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{k+1}{k-1}$，解得 $x=-k$.

因此 Q 点的坐标为 $(-k,y_0)$，又 $P(-\dfrac{1}{k},0)$，$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-k)\cdot(-\dfrac{1}{k})+0=1$.

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值 .

3.【证明】令直线 PQ 的方程是 $x=my+1$， $P(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$

则由 $\begin{cases}3x^2+2y^2-12=0\\x=my+1\end{cases}$， 得 $\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$

则 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$， $y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2+4}$(#)

又 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{y_1}{my_1+3}$， $k_2=\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_2}{my_2-1}$

所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{y_1\left(my_2-1\right)}{y_2\left(my_1+3\right)}=\dfrac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$ (*)

由(#)得 $y_1y_2=\dfrac{3}{2m}\left(y_1+y_2\right)$， 代入(*)得:

$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{3}{2}\left(y_1+y_2\right)-y_1}{\frac{3}{2}\left(y_1+y_2\right)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}.$$

4.【答案】 $\dfrac{1}{4}$

证明：令直线 CD 的方程是 $y=-\dfrac{1}{2}x+t$， $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$

则由 $\begin{cases}x^2+4y^2-4=0\\y=-\dfrac{1}{2}y+t\end{cases}$， 得 $x^2-2tx+(2t^2-2)=0$

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1}{x_1-2}\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}x_1+t\right)\left(-\frac{1}{2}x_2+t\right)-\left(-\frac{1}{2}x_1+t\right)}{x_2\left(x_1-2\right)}$

$$=\frac{1}{4}\frac{\left(x_1-2t\right)\left(x_2-2t\right)+2\left(x_1-2t\right)}{x_1x_2-2x_2}=\frac{1}{4}\frac{x_1x_2-2x_2}{x_1x_2-2x_2}=\frac{1}{4}.$$

5.【答案】3

【证明】设直线 l 的方程是 $y=kx+1$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$

则由 $\begin{cases}3x^2+4y^2-12=0\\y=kx+1\end{cases}$， 得 $(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$

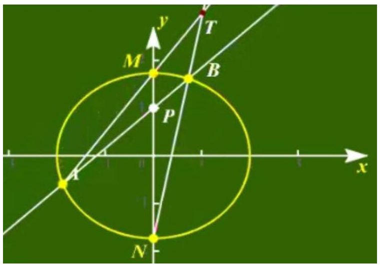
所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8k}{4k^2+3},x_1x_2=-\dfrac{8}{4k^2+3}$， 所以 $x_1+x_2=\dfrac{1}{k}x_1x_2$

又因为 $AM:y=\dfrac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}x+\sqrt{3}$， $BN:y=\dfrac{y_2+\sqrt{3}}{x_2}x-\sqrt{3}$

所以 $\dfrac{y_2+\sqrt{3}}{x_2}\left(y-\sqrt{3}\right)=\dfrac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}\left(y+\sqrt{3}\right)$

故 $y=\sqrt{3}\dfrac{2kx_1x_2+(1-\sqrt{3})x_2+(1+\sqrt{3})x_1}{(1+\sqrt{3})x_1-(1-\sqrt{3})x_2}=\sqrt{3}\dfrac{(3-\sqrt{3})x_2+(3+\sqrt{3})x_1}{(1+\sqrt{3})x_1-(1-\sqrt{3})x_2}$

$$=3\frac{(1+\sqrt{3})x_1-(1-\sqrt{3})x_2}{(1+\sqrt{3})x_1-(1-\sqrt{3})x_2}=3.$$



专题 28　数列的性质

【方法点拨】

1.数列是定义在正整数集或其有限子集上的函数，数列的函数性主要涉及数列的单调性(判断数列的增减性和确定数列中最大(小)项，求数列最值等)等；

2.数列中的恒成立问题较函数中恒成立问题更难，但方法是想通的，一般都要分离参数，一般都要转化为研究单调性，但由于数列定义域是离散型变量,不连续，这给研究数列的单调性带来了难度,其一般解决方法是作差或作商.

【典型题示例】

例 1　若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>a-7$对一切正整数 n 都成立，则正整数 a 的最大值为________.

【答案】8

【分析】要求正整数 a 的最大值，应先求 a 的取值范围，关键是求出代数式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$的最小值，可将其视为关于 n 的函数，通过单调性求解．

【解析】令 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=\frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}>0$，

所以 $f(n)$在 $\mathbf{N}^*$上是增函数.

又 $f(1)=\frac{13}{12}$，对一切正整数 n，$f(n)>a-7$ 都成立的充要条件是$\frac{13}{12}>a-7$，

所以 $a<\frac{97}{12}$，故所求正整数 a 的最大值是 8.

点评：本题是构造函数法解题的很好的例证．如果对数列求和，那就会误入歧途．本题构造函数 $f(n)$，通过单调性求其最小值解决了不等式恒成立的问题．利用函数思想解题必须从不等式或等式中构造出函数关系并研究其性质，才能使解题思路灵活变通.

例 2　已知常数 $\lambda\geq 0$，设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足：$a_1=1$，$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$．若 $a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是________．

【答案】$\lambda>\frac{1}{3}$

【分析】已知条件$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}$中含"项、和"，需抓住特征，实施消和.

【解析】$\because S_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}S_n+\left(\lambda\cdot 3^n+1\right)a_{n+1}\quad a_n>0$，

$\therefore \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\lambda\cdot 3^n+1$

则$\frac{S_2}{a_2}-\frac{S_1}{a_1}=\lambda\cdot 3+1$，$\frac{S_3}{a_3}-\frac{S_2}{a_2}=\lambda\cdot 3^2+1$，$\cdots\ \frac{S_n}{a_n}-\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\lambda\cdot 3^{n-1}+1\left(n\geq 2\right)$

相加，得$\frac{S_n}{a_n}-1=\lambda\left(3+3^2+\cdots 3^{n-1}\right)+n-1$

则$S_n=\left(\lambda\frac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n\left(n\geq 2\right)$

上式对$n=1$也成立，

$\therefore S_n=\left(\lambda\frac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n\left(n\geq N^*\right)$． ③

$\therefore S_n=\left(\lambda\frac{3^{n+1}-3}{2}+n+1\right)\cdot a_{n+1}\left(n\geq N^*\right)$． ④

④−③，得$a_{n+1}=\left(\lambda\frac{3^{n+1}-3}{2}+n+1\right)\cdot a_{n+1}-\left(\lambda\frac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n$

即$\left(\lambda\frac{3^{n+1}-3}{2}+n\right)\cdot a_{n+1}=\left(\lambda\frac{3^n-3}{2}+n\right)\cdot a_n$

$\because \lambda\geq 0$，$\therefore \lambda\frac{3^{n+1}-3}{2}+n>0,\lambda\frac{3^n-3}{2}+n>0$ ．

$\because a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n$对一切$n\in \mathbf{N}^*$恒成立，

$\therefore \lambda\frac{3^n-3}{2}+n<\frac{1}{2}(\lambda\frac{3^{n+1}-3}{2}+n)$对一切$n\in \mathbf{N}^*$恒成立．

即$\lambda>\frac{2n}{3^n+3}$对一切$n\in \mathbf{N}^*$恒成立．

记$b_n=\frac{2n}{3^n+3}$,则$b_n-b_{n+1}=\frac{2n}{3^n+3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}+3}=\frac{\left(4n-2\right)\cdot 3^n-6}{\left(3^n+3\right)\left(3^{n+1}+3\right)}$

当$n=1$时，$b_n-b_{n+1}=0$；

当 $n\ge 2$ 时，$b_n-b_{n+1}>0$

$\therefore\ b_1=b_2=\dfrac{1}{3}$ 是 $\{b_n\}$ 中的最大项．

综上所述，λ 的取值范围是 $\lambda>\dfrac{1}{3}$．

【巩固训练】

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，则在数列 $a_n=\dfrac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}(n\in N^*)$ 则数列 $\{a_n\}$ 的前 50 项中最小项为第______项，最大项为第____项.

2.等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1000$，公比 $q=\dfrac{1}{2}$，设 $p_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n(n\in N^*)$，则 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n,\cdots(n\in N^*)$ 中第_____项最大.

3.已知 $a_n=\dfrac{n}{n^2+20}(n\in N^*)$，则在数列 $\{a_n\}$ 的最大项为第_____项.

4.求使得不等式 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}\cdots\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>2a-5$ 对 $n\in N^*$ 恒成立的正整数 a 的最大值为__________.

5.数列 $\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}\sqrt{\dfrac{1}{a_n^2}+4}=1$,记$S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$,若 $S_{2n+1}-S_n\le\dfrac{m}{30}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，则正整数 m 的最小值为_____________.

6．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^n(\lambda-n)-6$，若数列$\{a_n\}$单调递减，则λ的取值范围是

A．$(-\infty，2)$　　B．$(-\infty，3)$　　C．$(-\infty，4)$　　D．$(-\infty，5)$

7．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-1$.若对任意正整数 n 都有 $\lambda S_{n+1}-S_n<0$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为(　)

A．$(-\infty,1)$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$　　D．$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$

8．已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-1\right]$，则数列 $\{a_n\}$ 中的最小项为(　　).

A．a_1　　B．a_2　　C．a_3　　D．a_4

9．已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-8}{a_n-1}\left(n\in N^*\right)$，若对任意的正整数 n，都有 $a_n>3$，则实数 a 的取值范围(　　)

A．$(0,3)$　　B．$(3,+\infty)$　　C．$[3,4)$　　D．$[4,+\infty)$

10．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3(n+1)a_n}{n}\left(n\in N^*\right)$，若 $\exists n\in N^*$，使得 $a_n-3k\cdot 4^n>0$ 成立，则实数 k 的取

值范围是(　　)

A．$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　B．$(-\infty,0]$　　C．$\left(-\infty,\frac{3}{8}\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{27}{64}\right)$

【答案或提示】

1.【答案】8、9

2.【答案】10

3.【答案】 4、5

4.【答案】 3

5.【答案】10

6.【答案】A

【解析】$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n-1}(2\lambda-2n-1),n\geq 2$， $a_1=3\lambda-9$，

因为$\{a_n\}$单调递减，所以$a_n-a_{n-1}<0,(n\geq 2)$，

所以$a_n-a_{n-1}=3^{n-2}\cdot 4(\lambda-n-1)<0,n\geq 3$，且$a_2-a_1=3\lambda-6<0$，

所以只需$\lambda-n-1<0$， $n\geq 3$，且$\lambda<2$，

所以$\lambda<2$，故选 A .

7.【答案】C

【解析】当$n=1$时， $S_1=2a_1-1$，即$a_1=2a_1-1$，得$a_1=1$；

当$n\geq 2$时，由$S_n=2a_n-1$，得$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，两式相减得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，得$a_n=2a_{n-1}$， $\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$，所以，

数列$\{a_n\}$为等比数列，且首项为1，公比为2， $\therefore a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$ $\therefore S_n=2a_n-1=2\times 2^{n-1}-1=2^n-1$，

由$\lambda S_{n+1}-S_n<0$，得$\lambda<\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)-\frac{1}{2}}{2^{n+1}-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2^{n+1}-1)}$，

所以，数列$\left\{\dfrac{S_n}{S_{n+1}}\right\}$单调递增，其最小项为$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2-1}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}$，所以， $\lambda<\dfrac{1}{3}$，

因此，实数λ的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$，故选 C .

8.【答案】C

【解析】因为$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-1\right]\leq 0$，$(n\in N^+)$

所以$-a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right]\geq 0$，

所以$-a_n \le \left(\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,

当且仅当$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\Rightarrow n=\log_{\frac{3}{4}}\dfrac{1}{2}+1$取"=".

又因为$3<\log_{\frac{3}{4}}\dfrac{1}{2}+1<4$.

当$n=3$时,$a_3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-1\right]=-\dfrac{63}{256}$.

当$n=4$时,$a_4=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-1\right]=-\dfrac{999}{4096}$.

所以数列$\{a_n\}$中的最小项为a_3.故选:C.

9.【答案】B

【解析】$\because a_{n+1}=\dfrac{5a_n-8}{a_n-1}=\dfrac{5(a_n-1)-3}{a_n-1}=5-\dfrac{3}{a_n-1}(a_n>3)$,

又$y=5-\dfrac{3}{x-1}$在区间$(3,+\infty)$上单调递增,

$\therefore a_{n+1}>a_n>\ldots>a_1=a>3$, $\therefore$实数a的取值范围$(3,+\infty)$, 故选: B .

10.【答案】D

【解析】$\because a_{n+1}=\dfrac{3(n+1)a_n}{n}\left(n\in N^*\right)$,$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=3\dfrac{a_n}{n}$,

记$b_n=\dfrac{a_n}{n}$,则$\{b_n\}$是以$b_1=3$,$q=3$的等比数列,

$\therefore b_n=3^n$,$\therefore a_n=n\cdot 3^n$,

$\because \exists n\in N^*$,$a_n-3k\cdot 4^n>0$,

等价于$\exists n\in N^*$, $3k<n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, 即$3k<\left(n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)_{\max}$

令$c_n=n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,则$c_{n+1}-c_n=(n+1)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\cdot\dfrac{3-n}{4}$

$\therefore n<3$时,$c_{n+1}>c_n$;$n\ge 4$时,$c_{n+1}<c_n$.

$\therefore c_1 < c_2 < c_3 = c_4 > c_5 > c_6 \cdots$,

$\therefore \left(n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)_{\max} = c_3 = c_4 = \frac{81}{64}$.

$\therefore k < \frac{27}{64}$, $\therefore$ 实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{27}{64}\right)$,故选：D

专题 29　数列通项结构的应用

【方法点拨】

1.数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow a_n = pn + q$($p$，$q$ 为常数).

2. 数列$\{a_n\}$是等差数列$\Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn$($A$，$B$ 为常数).

3. 已知 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，且其首项为 a_1，公差为$\{a_n\}$公差的$\frac{1}{2}$.

4. 两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n、T_n之间的关系为 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

5.两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n、T_n，若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{An+B}{Cn+D}$，　则 $\frac{a_n}{b_m} = \frac{A(2n-1)+B}{C(2m-1)+D}$.

【典型题示例】

例 1　　S_n 是公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$也是等差数列，则 $a_1 =$________.

【答案】-1 或 3

【分析】用特殊值法，也可直接抓住等差数列的结构特征解题.

【解析一】(特殊值法)由题意 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + (a_1 - 1)n$，

$\because$ 数列$\{\sqrt{S_n+1}\}$是等差数列

$\therefore 2\sqrt{S_2+1} = \sqrt{S_1+1} + \sqrt{S_3+1}$，$2\sqrt{2a_1+3} = \sqrt{a_1+1} + \sqrt{3a_1+7}$，

解得 $a_1 = -1$ 或 $a_1 = 3$，

$a_1 = -1$ 时，$\sqrt{S_n+1} = \sqrt{n^2-2n+1} = n-1$，$a_1 = 3$ 时，$\sqrt{S_n+1} = \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$，均为 n 的一次函数，数列 $\{\sqrt{S_n+1}\}$是等差数列，

故 a_1 的值为－1 或 3.

【解析一】(特殊值法)由题意 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + (a_1 - 1)n$，

$\because$ 数列 $\{\sqrt{S_n+1}\}$ 是等差数列

$\therefore$ $\sqrt{S_n}=\sqrt{n^2+(a_1-1)n+1}$ 必为关于 n 的一次式，即 $n^2+(a_1-1)n+1$ 是完全平方式

$\therefore$ $(a_1-1)^2-4=0$

解之得 $a_1=-1$ 或 $a_1=3$ (下同解法一)．

例 2　已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 $q\left(q>1\right)$ 的等比数列，且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\sqrt{S_n+2}$ 也为等比数列，则 $q=$__________.

【答案】2

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 $q\left(q>1\right)$ 的等比数列.

所以 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{2-2q^n}{1-q}=\dfrac{-2q^n}{1-q}+\dfrac{2}{1-q}$．

$S_n+2=\dfrac{-2q^n}{1-q}+\dfrac{2}{1-q}+2$

$\sqrt{S_n+2}$ 为等比数列，则 $\{S_n+2\}$ 也为等比数列.

所以 $\dfrac{2}{1-q}+2=0$，即 $q=2$．

点评：等比数列通项的结构特征是：$a_n=Aq^n(A、q\neq 0)$．

例 3　已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$，则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是____________.

【答案】5

【解析】根据等差数列前 n 项和的公式不难得到：$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\dfrac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\dfrac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}=\dfrac{7n+19}{n+1}$　(＊)

(＊)式是一个关于 n 的一次齐次分式，遇到此类问题的最基本的求解策略是“部分分式”——即将该分式逆用通分，将它转化为分子为常数，只有分母中含有变量 n

因为 $\dfrac{7n+19}{n+1}=\dfrac{7(n+1)+12}{n+1}=7+\dfrac{12}{n+1}$

所以，要求使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n，只需 $n+1$ 为 12 的不小于 2 的正约数

所以 $n+1=2,3,4,6,12$

例 4　已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=-2\ 014$，$\frac{S_{2\ 014}}{2\ 014}-\frac{S_{2\ 008}}{2\ 008}=6$，则 $S_{2\ 020}$ 等于________.

【答案】2 020

【解析】由等差数列的性质可得 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列，设其公差为 d，

则 $\frac{S_{2\ 014}}{2\ 014}-\frac{S_{2\ 008}}{2\ 008}=6d=6$，∴ $d=1$，且首项为 $\frac{S_1}{1}=-2\ 014$.

故 $\frac{S_{2\ 016}}{2\ 016}=\frac{S_1}{1}+2\ 015d=-2\ 014+2\ 015=1$　，

∴ $S_{2\ 020}=1\times2\ 020=2\ 020$.

【巩固训练】

1.记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=2$，且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也为等差数列，则 $a_{13}=$____________.

2．已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_3\cdot a_4=117$，$a_2+a_5=22$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{S_n}{n+c}$（其中 $c\neq0$），若 $\{b_n\}$ 为等差数列，则 c 的值等于________.

3．设等比数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若对任意自然数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3^n+1}{4}$，则 $\frac{a_3}{b_3}$ 的值为________.

4. 设 S_n，T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，已知 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{4n-2}$，$n\in N^*$，则 $\frac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\frac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=$_______ .

5.已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_7=7$，$S_{15}=75$，则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 20 项和为____ .

6. 已知数列的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，若 $\{a_n\}$ 和 $\{\sqrt{S_n}\}$ 都是等差数列，则 $\frac{S_{n+10}}{a_n}$ 的最小值是_____.

【答案或提示】

1.【答案】50

【解析】设该等差数列的公差为 d，

则由等差数列求和公式得 $S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(2-\dfrac{d}{2})n$.

又因为数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 为等差数列，$2-\dfrac{d}{2}=0$，故 $d=4$.

所以 $a_{13}=a_1+12d=50$.

2.【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>0$，由等差数列的性质，得 $a_2+a_5=a_3+a_4=22$，

所以 a_3，a_4 是关于 x 的方程 $x^2-22x+117=0$ 的解，所以 $a_3=9$，$a_4=13$，易知 $a_1=1$，$d=4$，故通项为 $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$.

所以 $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}=\dfrac{2n^2-n}{n+c}$.

法一 （**特殊值法**）所以 $b_1=\dfrac{1}{1+c}$，$b_2=\dfrac{6}{2+c}$，$b_3=\dfrac{15}{3+c}(c\neq0)$.

令 $2b_2=b_1+b_3$，解得 $c=-\dfrac{1}{2}$.

当 $c=-\dfrac{1}{2}$时，$b_n=\dfrac{2n^2-n}{n-\frac{1}{2}}=2n$，

当 $n\geq2$ 时，$b_n-b_{n-1}=2$.

故当 $c=-\dfrac{1}{2}$时，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.

法二 由 $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}=\dfrac{\frac{n(1+4n-3)}{2}}{n+c}=\dfrac{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n+c}$，

$\because c\neq0$，$\therefore$ 可令 $c=-\dfrac{1}{2}$，得到 $b_n=2n$.

$\because b_{n+1}-b_n=2(n+1)-2n=2(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

即存在一个非零常数 $c=-\dfrac{1}{2}$，使数列 $\{b_n\}$ 也为等差数列.

3.【答案】9

【解析】联想等比数列的前 n 项和的结构特征，可知：$S_n=\dfrac{a_1(1-9^n)}{1-9}$，$T_n=\dfrac{b_1(1-3^n)}{1-3}$，且 $a_1=b_1$ ，所以 $\dfrac{a_3}{b_3}=(\dfrac{9}{3})^2=9$.

4.【答案】$\dfrac{41}{78}$

5.【答案】55

【解析】由等差数列的性质得$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，设$b_n=\dfrac{S_n}{n}$，其公差为$d$

且$b_7=\dfrac{S_7}{7}=1$，$b_{15}=\dfrac{S_{15}}{15}=5$，所以$d=\dfrac{1}{2}$，$b_1=-2$

所以$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$的前 20 项和即为$\{b_n\}$的前 20 项和，故为$20\times(-2)+\dfrac{20\times19}{2}\times\dfrac{1}{2}=55$.

6.【答案】21

【解析】设该等差数列的公差为d，

则由等差数列求和公式得$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$．

又因为数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$为等差数列，$a_1-\dfrac{d}{2}=0$，故$d=2a_1$．

所以$\dfrac{S_{n+10}}{a_n}=\dfrac{(n+10)^2a_1}{(2n-1)a_1}=\dfrac{1}{4}[(2n-1)+\dfrac{21^2}{2n-1}]+\dfrac{21}{2}\geq21$，当且仅当$n=10$时，“=”成立.

所以$\dfrac{S_{n+10}}{a_n}$的最小值是 21.

专题 30　隔项成等差数列问题

【方法点拨】

定义　在数列$\{a_n\}$中，若任意$n\in N^*$，存在$t\in N^*$且$t\geq2$，都有$a_{n+t}-a_n=d$ (d 为常数)，则称数列$\{a_n\}$是“隔项成等差”数列.

类型 1　$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+t}=An+B$：

由$\begin{cases}a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+t}=An+B\\a_{n-1}+a_n+\cdots+a_{n+t-1}=An-A+B\end{cases}$，两式相减得$a_{n+t}-a_{n-1}=A(n\geq2)$，这就得到“隔项成等差”数列$\{a_n\}$，

特别的，当$A=0$时，数列$\{a_n\}$为周期数列.

类型 2　$S_n+S_{n+1}+\cdots+S_{n+t}=An^2+Bn+C$：

由$\begin{cases}S_n+S_{n+1}+\cdots+S_{n+t}=An^2+Bn+C\\S_{n-1}+S_n+\cdots+S_{n+t-1}=A(n-1)^2+B(n-1)+C\end{cases}$，

两式相减得$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+t}=2An-A+B(n\geq2)$，这样，类型 2 就转化为类型 1 了，所不同的是不包含

首项 a_1.

类型 3　$a_{n+1}+(-1)^n a_n=An+B$：

对 n 赋值，有 $\begin{cases}a_{2n+1}+a_{2n}=2An+B\\ a_{2n}-a_{2n-1}=2An-A+B\\ a_{2n+2}-a_{2n-1}=2An+A+B\end{cases}$，通过加减可得 $\begin{cases}a_{2n+1}+a_{2n-1}=A\\ a_{2n}+a_{2n+2}=4An+A+2B\end{cases}$，从而

$a_{2n-2}+a_{2n}=4An-3A+2B$，所以 $a_{2n+2}-a_{2n}=4A$，这就得到"隔项成等差"数列.

【典型题示例】

例 1　设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$，则 $a_{11}=$ ______.

【答案】-2

【解析】由 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$ 得，$4S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)^2+7(n-1)(n\ge 2)$

两式相减得，$4S_n-4S_{n-1}=2a_n-n^2+7n-2a_{n-1}+(n-1)^2-7(n-1)(n\ge 2)$

即 $a_n+a_{n-1}=-n+4(n\ge 2)$，所以 $a_{n-1}+a_{n-2}=-n+5(n\ge 3)$

两式相减得，$a_n-a_{n-2}=-1(n\ge 3)$

又将 $n=1$ 代入 $4S_n=2a_n-n^2+7n\left(n\in N^*\right)$ 得，$a_1=3$

所以 $a_{11}=a_1+5\times(-1)=-2$.

例 2　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则其前 60 项和为________

【答案】1830

【分析】枚举找到规律，分奇偶找到连续的四项和构成等差数列.

【解析】由 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，可得 $a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5+a_4=7$，

$a_6-a_5=7$，$a_7-a_6=11$，…，$a_{100}-a_{99}=199$

所以 $a_3+a_1=2$，$a_4+a_2=8$，$a_7+a_5=2$，$a_8+a_6=24$，$a_9+a_{11}=2$，$a_{12}+a_{10}=40$，…，

所以从第一项起，每四项的和构成以 10 为首项，16 为公差的等差数列

所以 $\{a_n\}$ 前 60 项和为 $15\times 10+\dfrac{15\times 14}{2}\times 16=1830$.

【巩固训练】

1.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=(-1)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$，$n\in N^*$，则 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{100}=$ ____

2. 设 S_n 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，$S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}, n\in N^*$, 则

(1) $a_3=$______;

(2) $S_1+S_2+\cdots+S_{100}=$__________ .

3.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对任意 $n\in \mathrm{N}_+$，$S_n=(-1)^n a_n+\frac{1}{2^n}+n-3$ 且

$(t-a_{n+1})(t-a_n)<0$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是__________ .

4.各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3S_n=a_n a_{n+1}$，则 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=$_______.

5. 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1, a_2=1, a_3=4, a_4=\frac{1}{4}$，数列 $\left\{a_n\right\}$ 前 n 项和是 S_n，对任意的 $n\in N^*$，

$f\left(x\right)=\frac{a_{n+2}}{a_n}x+\left(a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}\right)\cos x-\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}e^x$，若 $f'\left(0\right)=0$，当 n 是偶数时，S_n 的表达式是___________ .

6. 若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3n-6$，且数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项的和 S_n 总满足 $S_n=An^2+Bn+C$ (其中 A、B、C 为常数)，则数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式是 $a_n=$ __________.

7. 若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3n-6$，且 $a_2=\frac{1}{2}a_1$，若数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递增，则 a_1 的取值范围为

.

【答案或提示】

1.【答案】$\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1)$

2.【答案】$-\frac{1}{16}$；$\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1)$

【解法一】$\because S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}$　　$\therefore$当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}-\frac{1}{2^{n-1}}$

两式相减得 $S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$

当 n 是偶数时，$a_n=a_n+a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$，所以 $a_{n-1}=-\frac{1}{2^n}$，即 n 是奇数时，$a_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$；

当 n 是奇数时，$2a_n=-a_{n-1}+\frac{1}{2^n}$，$a_{n-1}=-2a_n+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$，即当 n 是偶数时，$a_n=\frac{1}{2^n}$.

$$\therefore S_1+S_2+\cdots+S_{100}=(-a_1-\frac{1}{2})+(a_2-\frac{1}{2^2})+\cdots+(a_{100}-\frac{1}{2^{100}})$$

$$=(a_2+a_4+\cdots+a_{100})-(a_1+a_3+\cdots+a_{99})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})$$

$$=(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{99}})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})$$

$$=(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1).$$

【解法二】$\because S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n}$　　$\therefore S_n=(-1)^n(S_n-S_{n-1})-\frac{1}{2^n}$

当 n 是偶数时，$S_n=S_n-S_{n-1}-\frac{1}{2^n}$，$S_{n-1}=-\frac{1}{2^n}$，即当 n 是奇数时，$S_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$；

当 n 是奇数时，$S_n=-S_n+S_{n-1}-\frac{1}{2^n}$，$S_{n-1}=2S_n+\frac{1}{2^n}=0$，即当 n 是偶数时，$S_n=0$；

$$S_1+S_2+\cdots+S_{100}=-(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{100}})=-\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^{102}}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{100}}-1).$$

3.【答案】$-\frac{3}{4}<t<\frac{11}{4}$

【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=-\frac{3}{4}$

当 $n>2$ 时，$S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}+n-4$，所以 $a_n=(-1)^n a_n+(-1)^n a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$

当 n 为偶数时，$a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-1$；

当 n 为奇数时，$2a_n=-a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$，即 $\frac{1}{2^n}-2=-a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+1$，$a_{n-1}=3-\frac{2}{2^n}$.

所以 $a_n=\begin{cases}3-\dfrac{1}{2^n},n为偶数\\ \dfrac{1}{2^{n+1}}-1,n为奇数\end{cases}$.

当 n 为偶数时，$a_n=3-\dfrac{1}{2^n}\in\left[\dfrac{11}{4},3\right)$，当 n 为奇数时，$a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}-1\in\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$

又因为 $(t-a_{n+1})(t-a_n)<0$ 恒成立，$a_{n+1}<t<a_n$，所以 $-\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{11}{4}$.

4.【答案】$\dfrac{3n(n+1)}{2}$

【解析】$\because 3S_n=a_na_{n+1}$ $\quad\therefore 3S_{n-1}=a_{n-1}a_n\,(n\geq 2)$

两式相减得 $3(S_n-S_{n-1})=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，即 $3a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$

又因为 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=3\,(n\geq 2)$

当 $n=1$ 时，由 $3S_n=a_na_{n+1}$ 得 $3S_1=3a_1=a_1a_2$，所以 $a_2=3$

故 $a_2,a_4,a_6,a_8,\cdots$ 是以 $a_2=3$ 为首项，公差为 3 的等差数列

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}=n\times 3+\dfrac{n\times(n-1)}{2}\times 3=\dfrac{3n(n+1)}{2}$.

5.【答案】$\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{4}{3\times 2^n}+1$

【解析】$f'(x)=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}-(a_n+a_{n+2}-2a_{n+1})\sin x-\dfrac{a_{n+4}}{a_{n+2}}e^x$，

因为 $f'(0)=0$，所以 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}-\dfrac{a_{n+4}}{a_{n+2}}=0$，即 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{a_{n+4}}{a_{n+2}}$，所以数列 $\{a_n\}$ 中所有的奇数项成等比数列，所有的偶数项成等比数列，所以当 n 是偶数时，

S_n 的表达式是 $\dfrac{1\cdot\left(1-4^{\frac{n}{2}}\right)}{1-4}+\dfrac{1\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{4}{3\times 2^n}+1$.

6.【答案】$a_n=n-3$

7.【答案】a_1 Î $(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{3}{2})$