目录

第一章

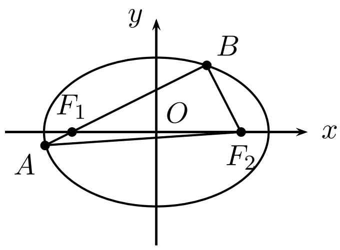
圆锥曲线的常见结论

本章我们将给出圆锥曲线的一些常见结论, 在实际解题过程中, 遇到选择题和填空题可以直接使用, 若是解答题, 则不能直接使用, 需给出证明过程.

第 1.1 节　椭圆的常见结论

这里我们以中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例, 给出一些常见结论, 至于焦点在 y 轴上的椭圆的结论是否一致? 请仿照焦点在 x 轴上的情况自行判断.

结论一　如图所示, 过左焦点 F_1 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$ (定值).



证明　由椭圆的定义可知:

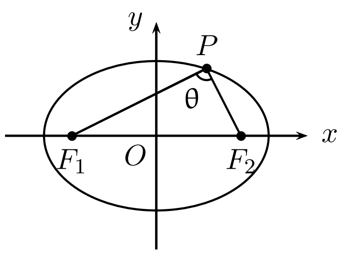
$$\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=2a\\|BF_1|+|BF_2|=2a\end{cases},$$

所以 $|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a$, 即 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$.

练习 1. 过椭圆 $E\colon 4x^2+y^2=1$ 的一个焦点 F_1 的直线 l 与 E 交于 A, B 两点, 则 A, B 与另一个焦点 F_2 所构成的 $\triangle ABF_2$ 的周长等于 (　　).

A. 2　　B. 4　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

结论二　如图所示, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 若 $\angle F_1PF_2=\theta$, 记 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 S, 则



(1) $S=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$;

(2) $\triangle PF_1F_2$ 的面积 S 的最大值 $S_{max}=bc$;

(3) 当点 P 在短轴的端点时, $\angle F_1PF_2$ 最大.

证明 (1) 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可知: $\cos\theta=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$, 所以

$$\begin{aligned}2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\theta&=|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2\\&=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2\\&=4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2\\&=4b^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\end{aligned}$$

从而 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}$, 于是

$$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\theta=\frac{b^2\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{b^2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

(2) 设点 P 的纵坐标为 y_P, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_P|=c\cdot|y_P|$$

当 $|y_P|=b$ 时, 即点 P 在短轴的端点时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积 S 取得最大值 bc

(3) 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0), 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可知:

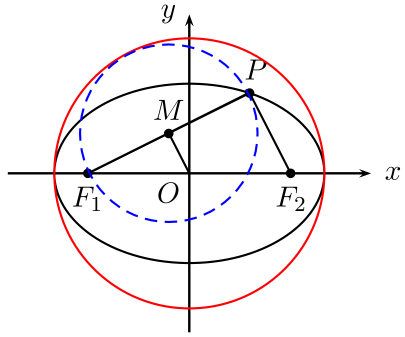
$$\cos\theta=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{(a+ex_0)^2+(a-ex_0)^2-4c^2}{2(a+ex_0)\cdot(a-ex_0)}=\frac{2a^2+2e^2x_0^2-4c^2}{2a^2-2e^2x_0^2}=\frac{4a^2-4c^2}{2a^2-2e^2x_0^2}-1$$

当 $x_0=0$ 时, $\cos\theta$ 有最小值 $\frac{a^2-2c^2}{a^2}$, 即 $\angle F_1PF_2$ 最大.

练习 2. 设 F_1, F_2 是椭圆 C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 的两个焦点, 若 C 上存在点 P, 使得 $\angle F_1PF_2=120^\circ$, 则实数 m 的取值范围是__________.

练习 3. 已知点 P 在椭圆 C: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$ 上, F_1, F_2 是 C 的两个焦点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 18, 则 $\angle F_1PF_2$ 的余弦值等于__________.

$\boxed{\text{结论三}}$ 如图所示, 以椭圆的任意焦半径为直径的圆, 都与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 内切.



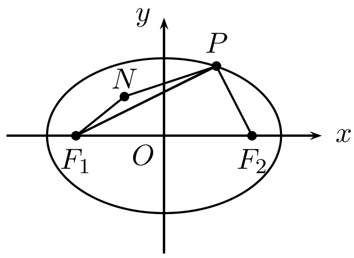
证明 取 PF_1 的中点 M, 连接 OM, 则圆 M 的直径为 F_1P, 半径为 MF_1, 在 $\triangle PF_1F_2$

中, 因为 M 为 F_1P 的中点, O 为 F_1F_2 的中点, 所以

$$OM=\frac{1}{2}|PF_2|=\frac{1}{2}(2a-|PF_1|)=a-\frac{1}{2}|PF_1|=a-|MF_1|$$

因此圆 M 与圆 O 内切, 即以椭圆的任意焦半径为直径的圆, 都与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 内切.

结论四 如图所示, 若 N 为椭圆内一定点, 点 P 在椭圆上, 则



(1) $|PN|+|PF_2|$ 的最大值为 $2a+|NF_1|$, 最小值为 $2a-|NF_1|$;

(2) $|PN|+|PF_1|$ 的最大值为 $2a+|NF_2|$, 最小值为 $2a-|NF_2|$.

证明 (1) 因为 $|PN|+|PF_2|=|PN|+2a-|PF_1|=2a+(|PN|-|PF_1|)$, 由于

$$-|NF_1|\leqslant|PN|-|PF_1|\leqslant|NF_1|$$

因此 $|PN|+|PF_2|$ 的最大值为 $2a+|NF_1|$, 最小值为 $2a-|NF_1|$.

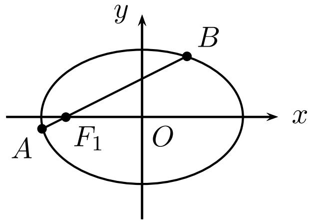
(2) 同理可证, $|PN|+|PF_1|$ 的最大值为 $2a+|NF_2|$, 最小值为 $2a-|NF_2|$.

注: 该结论可以记成“椭圆上的点到椭圆内一定点的距离与其中一焦点的距离之和有最值.”

练习 4. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 $A(-1, 1)$, 若 P 为椭圆 C 上一点, 则 $|PA|+|PF_2|$ 的最小值为________, 最大值为________.

结论五 过椭圆一焦点 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}$.

证明 如图所示, 我们先证明“过椭圆左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{2a}{b^2}$.” 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.



① 当直线 l 的斜率不存在时, 此时 $|AF_1|=\frac{b^2}{a}, |BF_1|=\frac{b^2}{a}$, 则

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{a}{b^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{2a}{b^2}.$$

② 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l: $y=k(x+c)$, 联立 $\begin{cases} y=k(x+c) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$, 消去 y, 消去 y, 得到关于 x 的一元二次方程

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2k^2a^2cx+k^2a^2c^2-a^2b^2=0$$

则 $x_1+x_2=\frac{-2k^2a^2c}{b^2+a^2k^2}$, $\quad x_1x_2=\frac{k^2a^2c^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$. 于是

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{1}{a+ex_1}+\frac{1}{a+ex_2}=\frac{2a+e(x_1+x_2)}{a^2+ae(x_1+x_2)+e^2x_1x_2}=\frac{2a+e\cdot\frac{-2k^2a^2c}{b^2+a^2k^2}}{a^2+ae\cdot\frac{-2k^2a^2c}{b^2+a^2k^2}+e^2\cdot\frac{k^2a^2c^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}}.$$

因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}$, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{2a+e\cdot\frac{-2k^2a^2c}{b^2+a^2k^2}}{a^2+ae\cdot\frac{-2k^2a^2c}{b^2+a^2k^2}+e^2\cdot\frac{k^2a^2c^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}} &= \frac{2a-\frac{2k^2ac^2}{b^2+a^2k^2}}{a^2-\frac{2k^2a^2c^2}{b^2+a^2k^2}+\frac{k^2c^4-b^2c^2}{b^2+a^2k^2}} \\
&= \frac{2a(b^2+a^2k^2)-2k^2ac^2}{a^2(b^2+a^2k^2)-2k^2a^2c^2+k^2c^4-b^2c^2} \\
&= \frac{2a^3k^2+2ab^2-2k^2ac^2}{a^4k^2+a^2b^2-2k^2a^2c^2+k^2c^4-b^2c^2} \\
&= \frac{2ak^2(a^2-c^2)+2ab^2}{a^2k^2(a^2-c^2)+a^2b^2-k^2c^2(a^2-c^2)-b^2c^2} \\
&= \frac{(2ak^2+2a)\cdot b^2}{k^2b^2(a^2-c^2)+a^2b^2-b^2c^2} \\
&= \frac{2ak^2+2a}{k^2b^2+a^2-c^2} \\
&= \frac{2a(k^2+1)}{b^2(k^2+1)}=\frac{2a}{b^2}
\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{2a}{b^2}$.

同理可证“过椭圆右焦点 F_2 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF_2|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{2a}{b^2}$.”

综上可知: “过椭圆一焦点 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}$.”

注: 证明过程中, 用到了椭圆的焦半径公式 $|AF_1|=a+ex_1$, $|BF_1|=a+ex_2$.

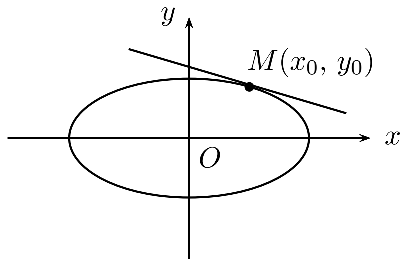
练习 5. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 经过 F_2 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 则 $\frac{|MF_2|+|NF_2|}{|MF_2|\cdot|NF_2|}$ 的值等于__________.

结论六 关于以椭圆上的点为切点的切线方程和椭圆的切点弦方程, 我们有以下结论:

(1) 若点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上, 则以 M 为切点且与 C 相切的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(2) 若点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 外, 则过点 P 作椭圆的两条切线, 切点分别为 P_1, P_2, 则切点弦 P_1P_2 所在的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

证明 (1) 如图所示, 设以 M 为切点且与 C 相切的直线为 l, 其斜率为 k.



对椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边求导, 可得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, 即 $y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, 从而

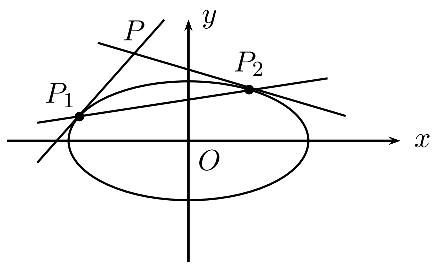
$$k=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

因此切线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, 化简整理可得

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}.$$

因为点 M 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, 从而切线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(2) 如图所示, 设切点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.



, 由 (1) 可知: PP_1 的直线方程

$$l_{PP_1}\colon \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

PP_2 的直线方程

$$l_{PP_2}\colon \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在 l_{PP_1} 和 l_{PP_2} 上, 所以 $\begin{cases}\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}=1\\ \frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减可得

$$\frac{x_0}{a^2}(x_2-x_1)+\frac{y_0}{b^2}(y_2-y_1)=0.$$

即

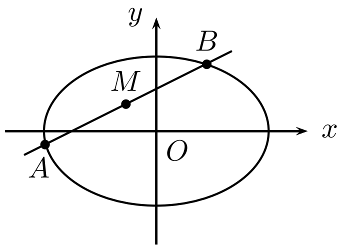
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

所以切点弦 P_1P_2 所在的直线方程为 $y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_1)$, 化简整理可得

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}.$$

因为 $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1$, 所以 P_1P_2 所在的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

$\boxed{\text{结论七}}$ 如图所示, 若 AB 是椭圆的一条弦, 点 $M(x_0, y_0)\,(y_0 \neq 0)$ 是弦 AB 的中点, 则 AB 所在直线的斜率 $k_{AB} = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.



证明 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 因为 $M(x_0, y_0)$ 为 AB 的中点, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ y_1 + y_2 = 2y_0 \end{cases}$.

又因为 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 两式相减可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0.$$

从而

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = -\frac{2x_0}{2y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2} = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

即 AB 所在直线的斜率 $k_{AB} = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

练习 6. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,(a > b > 0)$ 的右焦点为 $(3, 0)$, 过右焦点的直线交 C 于 A, B 两点, 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 则椭圆 C 的方程为 (　　).

A. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$　　B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$　　C. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$　　D. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

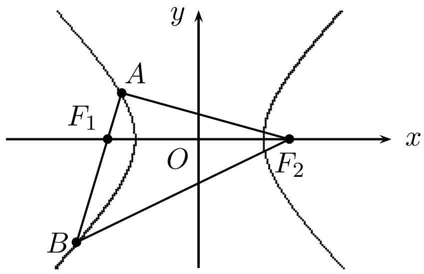
练习 7. 已知椭圆 E: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, 若过点 $P\,(2, 1)$ 作一弦, 使得该弦刚好被 P 平分, 则该弦所在的直线方程为__________.

练习 8. 已知椭圆 E: $mx^2 + ny^2 = 1$ 与直线 l_1: $y = 1 - x$ 交于 M, N 两点, 过坐标原点 O 与线段 MN 的中点 P 的直线 l_2 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\frac{m}{n}$ 的值.

第 1.2 节　双曲线的常见结论

这里我们以中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例, 给出一些常见结论, 至于焦点在 y 轴上的双曲线的结论是否一致? 请仿照焦点在 x 轴上的情况自行判断.

结论一　如图所示, 过左焦点 F_1 的直线与双曲线交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a+2|AB|$.



证明　由双曲线的定义可知:

$$\begin{cases}|AF_2|-|AF_1|=2a\\|BF_2|+-|BF_1|=2a\end{cases},$$

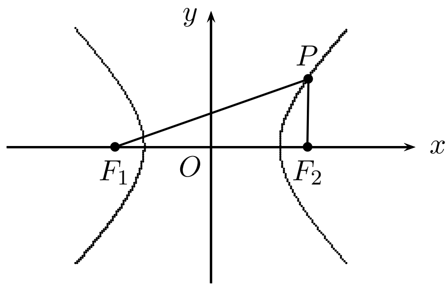
两式相加可得

$$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a,$$

即 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a+2|AB|$, 因此 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a+2|AB|$.

结论二　若 P 为双曲线 C 上一点, F_1, F_2 为 C 的左、右焦点, 且 $\angle F_1PF_2=\theta$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 $\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

证明　如图所示, 设 P 为双曲线右支上一点.



在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可知: $\cos\theta=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$, 所以

$$\begin{aligned}2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\theta&=|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2\\&=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2\\&=4a^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2\\&=4b^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|\end{aligned}$$

从而 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$, 于是

$$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\theta=\frac{b^2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{b^2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

同理可证: 点 P 在左支时, $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 $\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

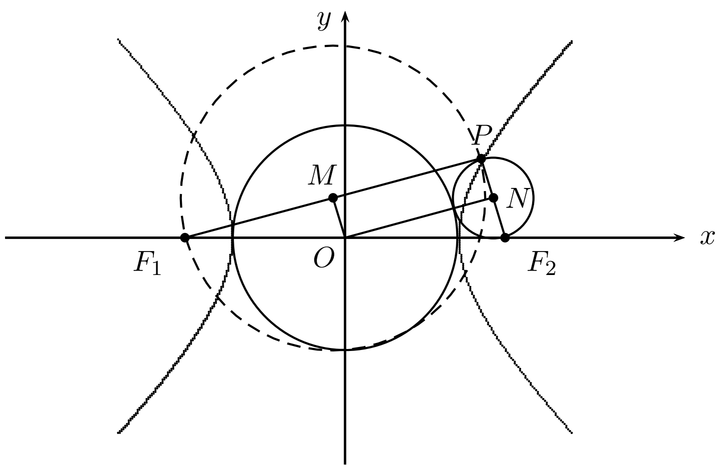
综上可知: 若 P 为双曲线 C 上一点, F_1, F_2 为 C 的左、右焦点, 且 $\angle F_1PF_2=\theta$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 $\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

练习 1. 已知点 M 在双曲线 H: $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右支上, F_1, F_2 是 H 的左、右焦点, 且 $\angle F_1MF_2=60^\circ$, 则 $\triangle F_1MF_2$ 的面积等于__________.

练习 2. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 H: $x^2-y^2=1$ 的左焦点和右焦点, 点 P 在 H 上, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的值等于 ( ).

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

结论三 如图所示, 以双曲线的长焦半径 $|PF_1|$ 为直径的圆 M 与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 内切; 以双曲线的短焦半径 $|PF_2|$ 为直径的圆 N 与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 外切.



证明 连接 OM, 则圆 M 的直径为 F_1P, 半径为 MF_1, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 因为 M 为 F_1P 的中点, O 为 F_1F_2 的中点, 所以

$$|OM|=\frac{1}{2}|PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|-2a)=\frac{1}{2}|PF_1|-a=|MF_1|-a$$

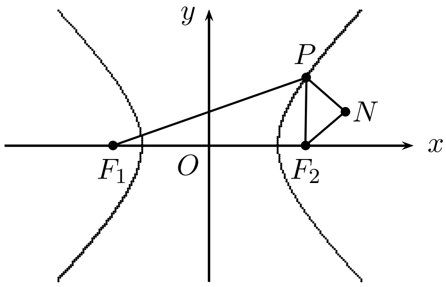
因此以长焦半径 PF_1 为直径的圆与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 内切.

连接 ON, 则圆 N 的直径为 F_2P, 半径为 NF_1, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 因为 N 为 F_2P 的中点, O 为 F_1F_2 的中点, 所以

$$|ON|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(|PF_2|-2a)=\frac{1}{2}|PF_2|-a=|NF_2|-a$$

因此以短焦半径 $|PF_2|$ 为直径的圆 N 与圆 O: $x^2+y^2=a^2$ 外切.

$\boxed{\text{结论四}}$ 如图所示, 若 N 为双曲线内一定点, 点 P 在双曲线上, 则



(1) $|PN|+|PF_2|$ 的最小值为 $|NF_1|-2a$;

(2) $|PN|+|PF_1|$ 的最小值为 $|NF_2|-2a$.

证明 (1) 因为 $|PN|+|PF_2|=|PN|+|PF_1|-2a$, 所以当 P, N, F_1 三点共线时, $|PN|+|PF_1|$ 取得最小值 $|NF_1|$, 因此 $|PN|+|PF_2|$ 的最小值为 $|NF_1|-2a$.

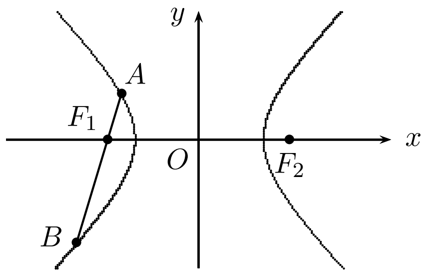
(2) 同理可证: $|PN|+|PF_1|$ 的最小值为 $|NF_2|-2a$.

注: 该结论可以记成“双曲线上的点到双曲线内一定点的距离与其中一焦点的距离之和有最小值.”

练习 3. 已知双曲线 $C\colon x^2-y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 若点 P 在 C 上, 则 $|PA|+|PF_2|$ 的最小值为__________.

$\boxed{\text{结论五}}$ 过双曲线一焦点 F 的直线与双曲线的一支的交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}$.

证明 如图所示, 我们先证明“过双曲线左焦点 F_1 的直线 l 与双曲线的左支交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{2a}{b^2}$.” 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.



① 当直线 l 的斜率不存在时, 此时 $|AF_1|=\frac{b^2}{a}, |BF_1|=\frac{b^2}{a}$, 则

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{a}{b^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{2a}{b^2}.$$

② 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l\colon y=k(x+c)$, 联立 $\begin{cases} y=k(x+c) \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$, 消去 y, 消去 y, 得到关于 x 的一元二次方程

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2k^2a^2cx-k^2a^2c^2-a^2b^2=0$$

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2a^2c}{b^2-a^2k^2}$, $x_1x_2=\frac{-k^2a^2c^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$. 由双曲线的焦半径公式可得

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=-\frac{1}{a+ex_1}-\frac{1}{a+ex_2}=-\frac{2a+e(x_1+x_2)}{a^2+ae(x_1+x_2)+e^2x_1x_2}.$$

于是

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=-\frac{2a+e\cdot\frac{2k^2a^2c}{b^2-a^2k^2}}{a^2+ae\cdot\frac{2k^2a^2c}{b^2-a^2k^2}-e^2\cdot\frac{k^2a^2c^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}}.$$

因为双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}$, 所以

$$\begin{aligned}
-\frac{2a+e\cdot\frac{2k^2a^2c}{b^2-a^2k^2}}{a^2+ae\cdot\frac{2k^2a^2c}{b^2-a^2k^2}-e^2\cdot\frac{k^2a^2c^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}}&=-\frac{2a+\frac{2k^2ac^2}{b^2-a^2k^2}}{a^2+\frac{2k^2a^2c^2}{b^2-a^2k^2}-\frac{k^2c^4+b^2c^2}{b^2-a^2k^2}}\\
&=-\frac{2a(b^2-a^2k^2)+2k^2ac^2}{a^2(b^2-a^2k^2)+2k^2a^2c^2-k^2c^4-b^2c^2}\\
&=-\frac{2ab^2-2a^3k^2+2k^2ac^2}{a^2b^2-a^4k^2+2k^2a^2c^2-k^2c^4-b^2c^2}\\
&=-\frac{2ab^2+2ak^2(c^2-a^2)}{a^2b^2+a^2k^2(c^2-a^2)-k^2c^2(c^2-a^2)-b^2c^2}\\
&=-\frac{(2a+2ak^2)\cdot b^2}{a^2b^2+k^2(c^2-a^2)(a^2-c^2)-b^2c^2}\\
&=-\frac{2a+2ak^2}{a^2-k^2b^2-c^2}=\frac{2a(1+k^2)}{c^2-a^2+b^2k^2}=\frac{2a(1+k^2)}{b^2(1+k^2)}=\frac{2a}{b^2}
\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{2a}{b^2}$. 同理可证“过双曲线右焦点 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF_2|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{2a}{b^2}$.”

综上可知:“过双曲线一焦点 F 的直线与双曲线的一支交于 A, B 两点, 则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}$.”

注: 证明过程中需用到双曲线的焦半径公式:

当 A, B 在左支时: $|AF_1|=-a-ex_1, |BF_1|=-a-ex_2$;

当 A, B 在右支时: $|AF_2|=ex_1-a, |BF_2|=ex_2-a$.

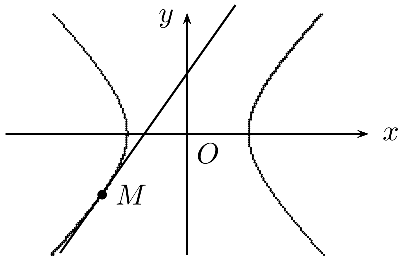
练习 4. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 经过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 则 $\frac{|AF_2|+|BF_2|}{|AF_2|\cdot|BF_2|}$ 的值等于__________.

结论六 关于以双曲线上的点为切点的切线方程和双曲线的切点弦方程, 我们有以下结论:

(1) 若点 $M(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$ 上, 则过点 M 且与双曲线相切的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(2) 若点 $P(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$ 外, 则过点 P 作双曲线的两条切线, 切点分别为 P_1, P_2, 则切点弦 P_1P_2 的直线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

证明 (1) 如图所示, 设以 M 为切点且与 C 相切的直线为 l, 其斜率为 k.



对双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边求导, 可得 $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$, 即 $y'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, 从而

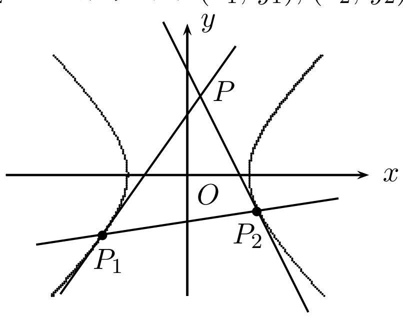
$$k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

因此切线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, 化简整理可得

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}.$$

因为点 M 在双曲线 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$, 从而切线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(2) 如图所示, 设切点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.



, 由 (1) 可知: PP_1 的直线方程

$$l_{PP_1}\colon \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

PP_2 的直线方程

$$l_{PP_2}\colon \frac{x_2x}{a^2}-\frac{y_2y}{b^2}=1.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在 l_{PP_1} 和 l_{PP_2} 上, 所以 $\begin{cases}\frac{x_1x_0}{a^2}-\frac{y_1y_0}{b^2}=1\\ \frac{x_2x_0}{a^2}-\frac{y_2y_0}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减可得

$$\frac{x_0}{a^2}(x_2-x_1)-\frac{y_0}{b^2}(y_2-y_1)=0.$$

即

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

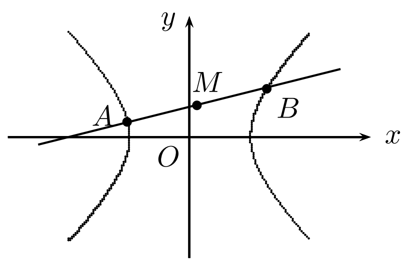
所以切点弦 P_1P_2 所在的直线方程为 $y-y_1=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_1)$, 化简整理可得

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0y_1}{b^2}.$$

因为 $\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0y_1}{b^2}=1$, 所以 P_1P_2 所在的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

结论七 若 AB 是双曲线的一条弦, 点 $M(x_0, y_0)\,(y_0 \neq 0)$ 是弦 AB 的中点, 则直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

证明 如图所示, 设直线 l 与双曲线交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点,



因为 $M(x_0, y_0)$ 为 AB 的中点, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ y_1 + y_2 = 2y_0 \end{cases}$.

又因为 A, B 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 两式相减可得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} - \frac{(y_1+y_2)(y_2-y_1)}{b^2} = 0.$$

从而

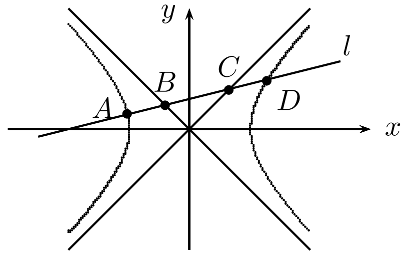
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{2x_0}{2y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

即 AB 所在直线的斜率 $k_{AB} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

练习 5. 以 $P(1, 8)$ 为中点, 作双曲线 $y^2 - 4x^2 = 4$ 的一条弦 AB, 则弦 AB 所在的直线方程为__________.

练习 6. 已知双曲线 H: $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 是否存在被点 $P(1, 1)$ 平分的弦 AB? 如果存在, 求出弦 AB 所在的直线方程; 如果不存在, 请说明理由.

结论八 如图所示, 若一直线 l 与双曲线的渐近线交于 B, C 两点, 与双曲线交于 A, D 两点, 则 $|AB| = |CD|$.



证明 ① 若直线 l 过原点, 则 B, C 重合, 结论显然成立;

② 若直线 l 与 x 轴垂直, 则由双曲线的对称性可知结论成立;

③ 若直线 l 不过原点且与 x 轴不垂直, 设 l 的斜率为 k, 弦 AD 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 由 $\boxed{\text{结论七}}$ 可知

$$\frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{b^2} \cdot k = 0 \tag{0.1}$$

设 $B(x_3, y_3), C(x_4, y_4)$, 弦 BC 的中点为 $M'(x_0', y_0')$. 因为双曲线的渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, 且 B, C 都在渐近线上, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{y_3^2}{b^2} = 0 \\ \frac{x_4^2}{a^2} - \frac{y_4^2}{b^2} = 0 \end{cases}.$$

两式相减可得

$$\frac{x_0'}{a^2} - \frac{y_0'}{b^2} \cdot k = 0. \tag{0.2}$$

由 (0.1) 和 (0.2) 可知: 点 M, M' 都在直线 l': $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \cdot k = 0$ 上, 又点 M, M' 都在直线 l 上, 所以 M 与 M' 重合, 于是

$$|AB| = |AM'| - |BM'| = |AM| - |BM| = |DM| - |CM| = |DM'| - |CM'| = |CD|.$$

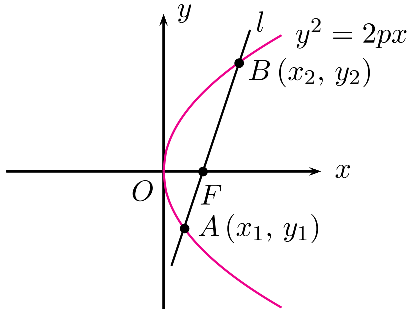
综上可知: 若一直线 l 与双曲线的渐近线交于 B, C 两点, 与双曲线交于 A, D 两点, 则 $|AB| = |CD|$.

练习 7. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,(a > 0,\, b > 0)$ 的右焦点作与 x 轴垂直的直线 l, 若直线 l 与双曲线交于 P, S 两点, 与双曲线的渐近线交于 T, G 两点, 且 $3|PS| = 2|TG|$, 则该双曲线的离心率等于__________.

第 1.3 节　抛物线的常见结论

这里我们以顶点在原点, 焦点在 x 轴正半轴上的抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 为例, 给出一些常见结论, 至于顶点在原点, 焦点在 x 轴负半轴、y 轴负半轴和 y 轴正半轴上的抛物线的结论是否一致? 请仿照焦点在 x 轴正半轴上的情况自行判断.

结论一　如图所示, 过抛物线 $C\colon y^2=2px$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 $A\,(x_1,\,y_1)$, $B\,(x_2,\,y_2)$ 两点, 则



(1) $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$, 反之也成立.　　(2) $y_1\cdot y_2=-p^2$, 反之也成立.

证明　(1) ① 当直线 l 的斜率不存在时, 即 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 此时 $x_1=x_2=\frac{p}{2}$, 则 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$;

② 当直线 l 的斜率存在时, 设 $l\colon y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 联立 C 的方程可得 $\begin{cases} y=k\left(x-\frac{p}{2}\right) \\ y^2=2px \end{cases}$, 消去 y, 得到

$$k^2x^2-\left(2p+k^2p\right)x+\frac{k^2p}{4}=0.$$

所以 $x_1x_2=\frac{\frac{k^2p}{4}}{k^2}=\frac{p^2}{4}$.

反之, 我们证明 "若 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$, 则直线 l 过焦点 F."

当直线 l 的斜率不存在时, 则 $x_1=x_2=\frac{p}{2}$, 此时 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 所以 l 经过焦点 $F\left(\frac{p}{2},\,0\right)$;

当直线 l 的斜率存在且不为零时, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, 联立 C 的方程可得 $\begin{cases} y=kx+m \\ y^2=2px \end{cases}$, 消去 y, 得到

$$k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0.$$

所以 $x_1x_2=\frac{m^2}{k^2}$, 又 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$, 所以 $\frac{m^2}{k^2}=\frac{p^2}{4}$, 即 $m^2=\frac{k^2p^2}{4}$, 由于 $km<0, p>0$, 因此 $m=-\frac{kp}{2}$, 故直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 即 l 经过焦点 F.

(2) ① 当直线 l 的斜率不存在时, 即 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 联立 $\begin{cases} x=\frac{p}{2} \\ y^2=2px \end{cases}$, 可得 $y_1=-p, y_2=p$, 则 $y_1\cdot y_2=-p^2$;

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时, 设 $l\colon y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 联立 C 的方程可得 $\begin{cases}y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\\ y^2=2px\end{cases}$, 消去 x, 得到

$$y^2-\frac{2p}{k}y-p^2=0.$$

所以 $y_1y_2=-p^2$.

反之, 我们证明 "若 $y_1y_2=-p^2$, 则直线 l 过焦点 F."

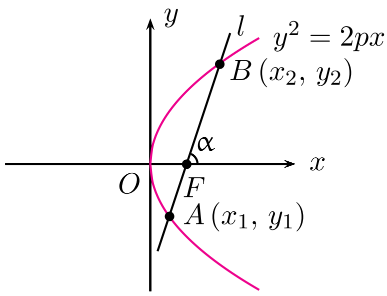
当直线 l 的斜率不存在时, 由抛物线的对称性可知: $y_1=-p$, $y_2=p$, 此时 $x_1=x_2=\frac{p}{2}$, 即 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 所以 l 经过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$;

当直线 l 的斜率存在且不为零时, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, 联立 C 的方程可得 $\begin{cases}y=kx+m\\ y^2=2px\end{cases}$, 消去 y, 得到

$$ky^2-2py+2pm=0.$$

所以 $y_1y_2=\frac{2pm}{k}$, 又 $y_1\cdot y_2=-p^2$, 所以 $\frac{2pm}{k}=-p^2$, 解得 $m=-\frac{kp}{2}$, 故直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 即 l 经过焦点 F.

结论二 如图所示, 已知抛物线 $C\colon y^2=2px$ 的焦点为 F, 经过 F 且倾斜角为 α 的直线 l 与 C 交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则



(1) $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

(2) $|AF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$; $|BF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$; $|AF|\cdot|BF|=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}$.

(3) $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

证明 (1) ① 当直线 l 的斜率不存在时, 即 $\alpha=90^\circ$, 此时 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 从而 $y_1=-p$, $y_2=p$, 即

$$|AF|=|BF|=p.$$

所以

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}.$$

② 当直线 l 的斜率存在时，设 l: $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$，联立 C 的方程可得 $\begin{cases} y=k\left(x-\frac{p}{2}\right) \\ y^2=2px \end{cases}$，消去 y，得到

$$k^2x^2-\left(2p+k^2p\right)x+\frac{k^2p}{4}=0.$$

所以

$$x_1+x_2=\frac{2p}{k^2}+p,\quad x_1x_2=\frac{p^2}{4},$$

由抛物线的定义可得：$|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}$，所以

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+\frac{p}{2}}+\frac{1}{x_2+\frac{p}{2}}=\frac{x_1+x_2+p}{\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)}.$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+p}{\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)} &= \frac{\frac{2p}{k^2}+p+p}{x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}} \\ &= \frac{\frac{2p}{k^2}+2p}{\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{2p}{k^2}+p\right)+\frac{p^2}{4}} \\ &= \frac{\frac{2p}{k^2}+2p}{\frac{p^2}{k^2}+p}=\frac{2p\cdot\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}{p^2\cdot\left(\frac{1}{k^2}+1\right)}=\frac{2}{p}\end{aligned}$$

故 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$.

(2) ① 当直线 l 的斜率不存在时，即 $\alpha=90^\circ$，此时 l: $x=\frac{p}{2}$，从而

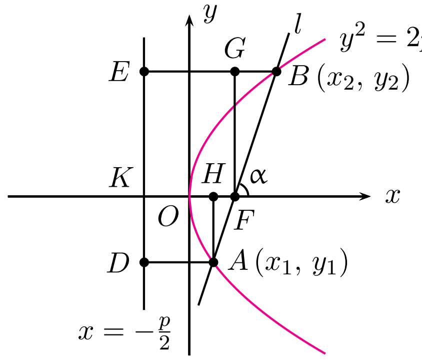
$$x_1=x_2=\frac{p}{2},\ y_1=-p,\ y_2=p.$$

于是

$$|AF|=p=\frac{p}{1+\cos 90^\circ}=\frac{p}{1+\cos\alpha}.$$

$$|BF|=p=\frac{p}{1-\cos 90^\circ}=\frac{p}{1-\cos\alpha}.$$

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时，如图所示，过 A, B 两点分别作准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的垂线，垂足分别为 D, E. 过 F 作 BE 的垂线，垂足为 G，再过 A 点作 x 轴的垂线，垂足为 H.



由抛物线的定义可知

$$|AF| = |AD|.$$

在 $\triangle AHF$ 中,

$$|HF| = |AF| \cdot \cos\alpha.$$

由于 $|KH| + |HF| = |KF|$, 且 $|KH| = |AD|$, $|KF| = p$, 所以 $|AF| + |AF| \cdot \cos\alpha = p$, 即

$$|AF| \cdot (1 + \cos\alpha) = p, \text{ 解得 } |AF| = \tfrac{p}{1+\cos\alpha}.$$

又由抛物线的定义可知

$$|BF| = |BE|.$$

在 $\triangle FGB$ 中,

$$|GB| = |BF| \cdot \cos\alpha.$$

由于 $|BE| + |EG| = |GB|$, 且 $|EG| = |KF| = p$, 所以 $|BE| - |GB| = |EG|$, 即

$$|BF| - |BF| \cdot \cos\alpha = p, \text{ 解得 } |BF| = \tfrac{p}{1-\cos\alpha}.$$

所以 $|AF| = \frac{p}{1+\cos\alpha}$ 和 $|BF| = \frac{p}{1-\cos\alpha}$, 因此

$$|AF| \cdot |BF| = \tfrac{p}{1+\cos\alpha} \cdot \tfrac{p}{1-\cos\alpha} = \tfrac{p^2}{1-\cos^2\alpha} = \tfrac{p^2}{\sin^2\alpha}.$$

(3) 由抛物线的定义可得: $|AF| = x_1 + \frac{p}{2}$, $|BF| = x_2 + \frac{p}{2}$, 所以

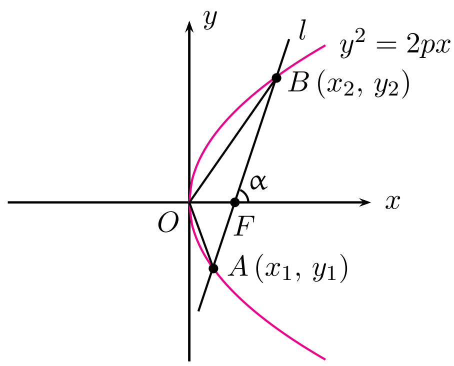
$$|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + \tfrac{p}{2} + x_2 + \tfrac{p}{2} = x_1 + x_2 + p.$$

由 (2) 可知: $|AF| = \frac{p}{1+\cos\alpha}$, $|BF| = \frac{p}{1-\cos\alpha}$, 所以

$$|AB| = |AF| + |BF| = \tfrac{p}{1+\cos\alpha} + \tfrac{p}{1-\cos\alpha} = \tfrac{p(1-\cos\alpha)+p(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \tfrac{2p}{\sin^2\alpha}.$$

综上可知: $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2\alpha}$.

$\boxed{\text{结论三}}$ 如图所示, 已知抛物线 $C\colon y^2 = 2px$ 的焦点为 F, 过 F 且倾斜角为 α 的直线 l 与 C 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2\sin\alpha}$.



证明 ① 当直线 l 的斜率不存在时, 即 $\alpha = 90^\circ$, 此时 $AB \perp OF$, 则

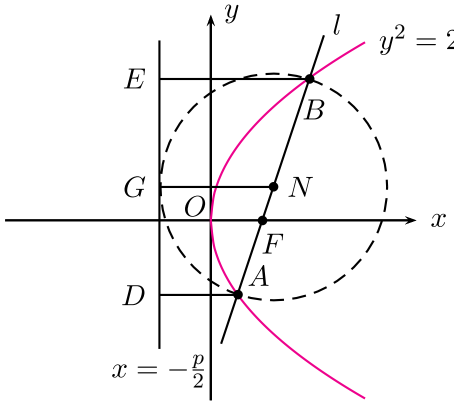
$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OF|=\frac{1}{2}\times 2p\times\frac{p}{2}=\frac{p^2}{2}=\frac{p^2}{2\sin 90^\circ}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}.$$

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时, 由 $\boxed{\text{结论二}}$ 可知: $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$. 又 $|OF|=\frac{p}{2}$, 则

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OF|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{2p}{\sin^2\alpha}\times\frac{p}{2}\times\sin\alpha=\frac{p^2}{2\sin\alpha}.$$

综上可知: $\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$.

结论四 如图所示, 已知抛物线 $C\colon y^2=2px$ 的焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 则以 AB 为直径的圆 N 与准线: $x=-\frac{p}{2}$ 相切.



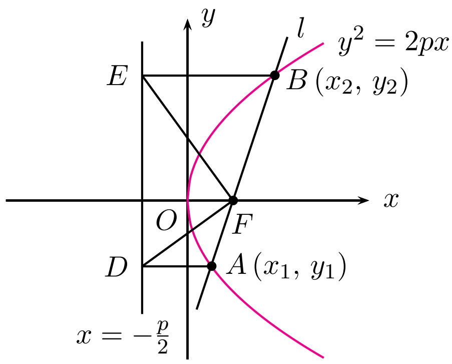
证明 ① 当直线 l 的斜率不存在时, 此时 $|AB|=2p$. 又圆心 N 到准线的距离 $|GN|=p$, 所以 $|GN|=\frac{1}{2}|AB|$, 因此以 $|AB|$ 为直径的圆 N 与准线相切.

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时, 设圆心 N 的坐标为 (x_0,y_0), 由 $\boxed{\text{结论二}}$ 可知: $|AB|=x_1+x_2+p$, 而圆心到准线的距离

$$|NG|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+p)=\frac{1}{2}|AB|.$$

故以 $|AB|$ 为直径的圆 N 与准线相切.

结论五 如图所示, 已知抛物线 $C\colon y^2=2px$ 的焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点, 过 A, B 两点分别作准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的垂线, 垂足分别为 D, E. 则 $EF\perp DF$.



证明 ① 当直线 l 的斜率不存在时, 即 $l\colon x=\frac{p}{2}$, 此时 $x_1=x_2=\frac{p}{2}$, $y_1=-p$, $y_2=p$, 则 D, E 的坐标分别为 $\left(-\frac{p}{2},-p\right)$, $\left(-\frac{p}{2},p\right)$, 又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, 于是直线 EF 的斜率

$$k_{EF}=\frac{0-p}{\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2})}=-1.$$

直线 DF 的斜率

$$k_{DF}=\frac{0-(-p)}{\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2})}=1.$$

因此 $k_{EF}\cdot k_{DF}=-1$, 故 $EF\perp DF$.

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时, 由题意可知: D 的坐标分别为 $\left(-\frac{p}{2},\,y_1\right)$, E 的坐标分别为 $\left(-\frac{p}{2},\,y_2\right)$, 又 $F\left(\frac{p}{2},\,0\right)$, 于是直线 DF 的斜率

$$k_{DF}=\frac{0-y_1}{\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2})}=-\frac{y_1}{p}.$$

直线 EF 的斜率

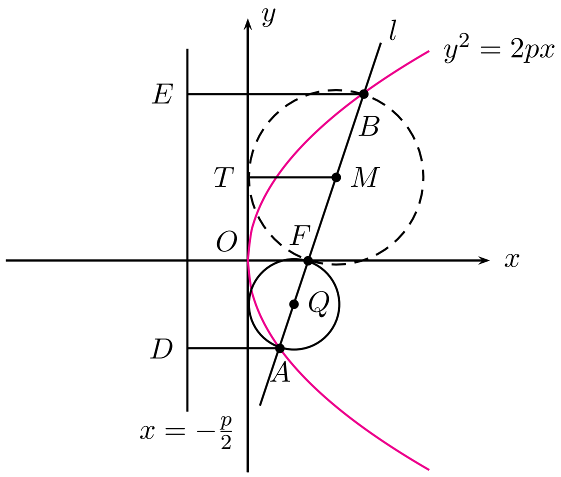
$$k_{EF}=\frac{0-y_2}{\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2})}=-\frac{y_2}{p}.$$

所以

$$k_{DF}\cdot k_{EF}=-\frac{y_1}{p}\cdot-\frac{y_2}{p}=\frac{y_1y_2}{p^2}.$$

由 结论一 可知: $y_1y_2=-p^2$, 从而 $k_{DF}\cdot k_{EF}=-1$, 于是 $EF\perp DF$.

结论六 如图所示, 若过抛物线 $C\colon y^2=2px$ 的焦点为 F 的直线 l 与 C 交于 $A\,(x_1,\,y_1)$, $B\,(x_2,\,y_2)$ 两点, 则以 $|BF|$ 为直径的圆 M 和以 $|AF|$ 为直径的圆 Q 均与 y 轴相切.



证明 ① 当直线 l 的斜率不存在时, 此时 $|BF|=p$. 又圆心 M 到 y 轴的距离 $|MT|=\frac{p}{2}$, 所以 $|MT|=\frac{1}{2}|BF|$, 因此以 $|BF|$ 为直径的圆 M 与 y 轴相切.

② 当直线 l 的斜率存在且不为零时, 设圆心 M 的坐标为 $(x_0,\,y_0)$, 由抛物线定义可知: $|BF|=|BE|=x_2+\frac{p}{2}$, 而圆心 M 到 y 轴的距离

$$|MT|=x_0=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}|BF|.$$

故以 $|BF|$ 为直径的圆 M 与 y 轴相切.

同理可证, 以 $|AF|$ 为直径的圆 Q 也与 y 轴相切.

练习 1. 已知抛物线 $C\colon y^2=6x$ 焦点为 F, 若过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点, 且 $|AB|=12$, 则弦 AB 所在直线的倾斜角等于__________.

练习 2. 已知抛物线 $C\colon x^2=2py\,(p>0)$ 的焦点为 F, 过 F 作倾斜角为 30° 的直线 l, 若直线 l 与抛物线 C 相交于 A,B 两点 (点 A 在 y 轴左侧), 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值等于__________.

练习 3. 过抛物线 $C\colon y=ax^2\,(a>0)$ 的焦点 F 作一直线 l 交 C 于 A,B 两点, 若线段 AF,BF 的长分别为 m,n, 则 $\frac{mn}{m+n}$ 等于 (　　).

A. $2a$　　B. $\frac{a}{4}$　　C. $\frac{1}{2a}$　　D. $\frac{1}{4a}$

练习 4. 过抛物线 $C\colon y^2=8x$ 的焦点作倾斜角为 45° 的直线 l, 则直线 l 被抛物线 C 所截得的弦长等于 (　　).

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

练习 5. 过抛物线 $C\colon y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l 交 C 于 A,B 两点, O 为坐标原点, 若 $|AF|=3$, 则 $\triangle AOB$ 的面积等于 (　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

练习 6. 已知抛物线 $C\colon y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点, O 为坐标原点.

(1) 若直线 l 的斜率为 1, 求以 AB 为直径的圆的方程;

(2) 若 $|AF|=2|BF|$, 求直线 l 的方程.