用构造法解题,不仅要有扎实广博的基础知识,而且还必须有敏锐的观察能力,由此及彼的联想能力和转化迁移的创造能力.用构造法解题是提高解题水平的一种妙法.

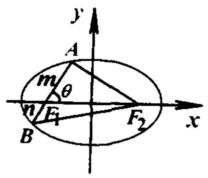
(作者工作单位:甘肃省靖远师范学校,邮编:730600)

圆锥曲线焦点弦长的三角计算公式

陈茂轩

(湖北省公安县第一中学　434300)

我们知道,圆锥曲线上一点与焦点的连线称为焦半径.因此,圆锥曲线的一条焦点弦被该焦点分成两条焦半径(焦点可以是内分点,也可以是外分点).在旧版高中教材中,用圆锥曲线的极坐标方程研究焦半径和焦点弦是比较方便的.现行新教材删去了极坐标内容,但我们仍然可以用新教材的观点和方法推导出使用方便、记忆简单的焦半径和焦点弦的三角形式的公式.



如图,设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$,过 F_1 的弦为 AB,直线 AB 的倾斜角为 $\theta(\theta\neq0)$.连 AF_2、BF_2,记 $|AF_1|=m$,$|BF_1|=n$.由第一定义,$|AF_2|=2a-m$,$|BF_2|=2a-n$,在 $\triangle AF_1F_2$ 中,$|F_1F_2|=2c$,由余弦定理,

$$(2a-m)^2=m^2+(2c)^2-2m\cdot 2c\cos\theta,$$

解之得 $$m=\frac{a^2-c^2}{a-c\cos\theta}=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}.\quad ①$$

同理,$$n=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}.\quad ②$$

所以椭圆的焦点弦长

$$|AB|_{椭圆}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\theta}.\quad ③$$

当 AB 过右焦点 F_2 时,公式①、②分别成为

$$\begin{cases} m=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}. & ①' \\ n=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}. & ②' \end{cases}$$

而公式③保持不变.

容易验证,$\theta=0$ 时,上述公式也成立.

类似可证,对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 有如下结论:

若 F_1 是弦 AB 的内分点,有

$$\begin{cases} m=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}, \\ n=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}, \end{cases}$$

若 F_2 是弦 AB 的内分点,有

$$\begin{cases} m=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta}, \\ n=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}. \end{cases}$$

若 F_1 或 F_2 为弦 AB 的外分点,A 位于右支或左支上,θ 为锐角,有

$$\begin{cases} m=\dfrac{b^2}{c\cos\theta-a}, \\ n=\dfrac{b^2}{c\cos\theta+a}. \end{cases}$$

θ 为钝角,有

$$\begin{cases} m=\dfrac{b^2}{-c\cos\theta-a}, \\ n=\dfrac{b^2}{-c\cos\theta+a}. \end{cases}$$

于是,有

$$|AB|=m+n=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}(焦点为内分点),$$

或 $$|AB|=m-n=\frac{2ab^2}{c^2\cos^2\theta-a^2}(焦点为外分点).$$

上述公式对 $\theta=0$ 仍然成立.

总之,具有双曲线焦点弦长计算公式

$$|AB|_{双曲线}=\frac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\theta|}=\frac{2ab^2}{|b^2-c^2\sin^2\theta|}.\quad ④$$

在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中,F 为其焦点,有

$$\begin{cases} m = \dfrac{p}{1-\cos\theta}, \\ n = \dfrac{p}{1+\cos\theta}, \end{cases} (0<\theta<\pi).$$

$$|AB|_{抛物线} = m + n = \frac{2p}{\sin^2\theta}. \quad ⑤$$

圆锥曲线的焦点弦问题是解析几何教学中的重点,也是难点,更是各类考试命题的热点.解此类问题,如果采用通常列方程求交点的方法,虽然思路自然,但运算量大,且易出错.解题时若能自觉运用上述公式,可明显减少计算量,提高解题速度使解题过程变得简捷明快.

我们称上述公式为圆锥曲线焦半径公式及弦长公式的三角形式,相比而言,称 $r = a \pm ex_0$ 及 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$ 等公式为代数形式.

下面引用一些常见的实际问题从几个方面说明焦半径和焦点弦长的三角公式的应用.

1 证明重要结论

例 1 过焦点且垂直于焦点所在对称轴的弦称为圆锥曲线的通径(正焦弦).证明:椭圆及抛物线的通径是最短的焦点弦.

证 在椭圆中由公式③,显然有

$$|AB| \geqslant \frac{2ab^2}{b^2+c^2} = \frac{2b^2}{a},$$

当且仅当 $\theta = 90°$ 取等号.所以椭圆的通径是最短的焦点弦.

由公式⑤,对抛物线,结论是显然的.

此结论对双曲线不成立.因为焦点为内分点时,$|AB|_{\min} = \dfrac{2b^2}{a}$,当焦点为外分点时,$|AB|_{\min} = 2a$,而 a、b 大小不定,所以 $\dfrac{2b^2}{a}$ 与 $2a$ 的大小也不能确定.但若限定焦点是弦 AB 的内分点时,结论便成立了.

本题的常规解法是回到定义,但不及此法来得干脆利落.

2 求离心率

例 2 过椭圆的一个焦点作一条与长轴夹角为 $30°$ 的弦 AB.若 $|AB|$ 恰好等于焦点到准线的距离的 2 倍,求此椭圆的离心率.

解 不妨设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a>b>0)$,一个焦点为 $F(c,0)$,相应的准线为 $x = \dfrac{a^2}{c}$.由公式③ $|AB| = \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2 30°} = \dfrac{8ab^2}{4a^2-3c^2}$,而 F 到相应准线的距离为 $\dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{b^2}{c}$,

所以 $\dfrac{8ab^2}{4a^2-3c^2} = 2\cdot\dfrac{b^2}{c}$,即 $4ac = 4a^2 - 3c^2$,

解得 $a = \dfrac{3}{2}c$,所以 $e = \dfrac{2}{3}$.

3 求面积

例 3 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点,过 F_1 作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线与椭圆交于 P、Q 两点,求 $\triangle F_2PQ$ 的面积.

解 首先求出边 PQ 的长度,它是过焦点 F_1 的弦,其倾斜角 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$,$a = \sqrt{2}$,$b = 1$,$c = 1$,由公式③

$$|PQ| = \frac{2\sqrt{2}}{2 - 1/2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

而 F_2 到直线 PQ 的距离为 $|F_1F_2|\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

所以 $\triangle F_2PQ$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{4}{3}$.

注 本题与例 2 的常规思路是一致的:先设直线方程,代入椭圆方程,写出根与系数的关系,然后用弦长公式 $|PQ| = \sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$ 求出 $|PQ|$,这样计算量较大.上述解答充分显示了③式的实用价值.

我们利用公式⑤很容易解决下面的问题:

设 O 为抛物线的顶点,F 为焦点,且 PQ 为过 F 的弦,已知 $|OF| = a$,$|PQ| = b$,求 $S_{\triangle POQ}$.

提示 设 PQ 倾斜角为 θ,则 $|PQ| = \dfrac{2p}{\sin^2\theta} = b$,

又 $\because p = 2a$,$\therefore \sin\theta = 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

故 $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}|OF||PQ|\sin\theta = a\sqrt{ab}$.

4 求距离

例 4 过椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点 F_2 作直线 l 交椭圆于 A、B 两点,若 $\dfrac{|AF_2|}{|BF_2|} = 2$,求左焦点 F_1 到直线 l 的距离 d.

解 设 A 位于 x 轴上方,直线 AB 的倾斜角为

θ,由公式①′、②′,得

$$|AF_2| = \frac{b^2}{a + c\cos\theta} = \frac{3}{2 + \cos\theta},$$

$$|BF_2| = \frac{b^2}{a - c\cos\theta} = \frac{3}{2 - \cos\theta},$$

依题意有 $\dfrac{2 - \cos\theta}{2 + \cos\theta} = 2.$

解得 $\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$,从而 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

所以 F_1 到 l 的距离 $d = 2c\sin(\pi - \theta) = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

5　求方程

例 5　过双曲线 $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ 的右焦点且斜率为$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$的直线交双曲线于 P、Q 两点,若 $OP \perp OQ$,$|PQ| = 4$,求双曲线的方程.

解　设直线 PQ 的倾斜角为 θ,则 $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$,$\sin^2\theta = \dfrac{3}{8}$. 又设直线 PQ 的方程为 $y = \sqrt{\dfrac{3}{5}}(x - c)$,$P(x_1, y_1)$,$Q(x_2, y_2)$,

$\because OP \perp OQ$,　$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

即　$x_1x_2 + \dfrac{3}{5}(x_1 - c)(x_2 - c) = 0$,

化简得　$3c(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 3c^2 = 0.$　　(1)

将直线方程代入双曲线方程,整理得

$(3a^2 - 5b^2)x^2 - 6a^2cx + (3a^2c^2 + 5a^2b^2) = 0$,

将上述方程的根与系数的关系代入(1)化简整理得　$b^2 = 3a^2$.　　(2)

由弦长公式④得

$$\frac{2ab^2}{|b^2 - 3c^2/8|} = 4 \Leftrightarrow |5b^2 - 3a^2| = 4ab^2. \qquad (3)$$

将(2)代入(3)化简,即得 $a^2 = 1$,从而 $b^2 = 3$.

故所求双曲线方程为 $3x^2 - y^2 = 3$.

上述各例解答,思路清晰、运算简便,这说明圆锥曲线焦半径和焦点弦长的三角计算公式具有不可忽视的实用价值. 掌握这一公式,有利于我们多角度地分析问题,灵活快捷地解决问题.

Steiner - Lehmas 定理的简证及推广

茹双林

(江苏省苏州市苏苑高级中学　215128)

"三角形两角的角平分线长相等,则三角形是等腰三角形",这就是著名的斯坦纳 - 莱默斯(Steiner - Lehmas)定理. 很多文献上给它作出了许多证明,下面笔者用面积及三角给出一个简单的证法并推广.

引理　若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中,$\angle A \geqslant \angle A'$,且 $\angle A + \angle A' < 180°$,则$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} \geqslant \dfrac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$.

证明　若 $\angle A \leqslant 90°$,由 $\angle A \geqslant \angle A'$,

$\therefore \sin A' \leqslant \sin A$.

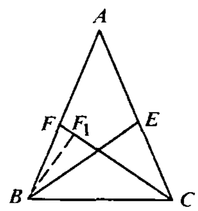
若 $\angle A > 90°$,由 $\angle A + \angle A' < 180°$,知

$\angle A' < 180° - \angle A < 90°$,

$\therefore \sin A' < \sin(180° - A) = \sin A$,

故　$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{A'B' \cdot A'C' \sin A'} \geqslant \dfrac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$.

定理证明　如图,不妨设 $AC \geqslant AB$,$\angle ABC = 2\alpha$,$\angle ACB = 2\beta$,则 $2\alpha \geqslant 2\beta$,即 $\alpha \geqslant \beta$.



在 CF 上取点 F_1 使 $\angle F_1BE = \beta$,则 $\angle BF_1C = \angle BEC$,

又 $\angle F_1BC = \alpha + \beta \geqslant 2\beta = \angle ECB$,

且　$\angle F_1BC + \angle ECB \leqslant \angle FBC + \angle ECB < 180°$,

由引理得

$$\frac{BF_1 \cdot CF_1}{BE \cdot CE} = \frac{S_{\triangle BF_1C}}{S_{\triangle BEC}} \geqslant \frac{BF_1 \cdot BC}{CE \cdot CB},$$

$\therefore CF_1 \geqslant BE = CF$,

故 F 与 F_1 重合,即 $\alpha = \beta$,所以 $AB = AC$.

用上述方法易证下面二个推广命题:

推广 1　$\triangle ABC$ 中,E、F 分别是 AC、AB 上的点,